21.1. Пусть $\mathscr{D}_L = \{u \in C^2[0,\ell] : u(0) = u(\ell) = 0\}$ — область определения оператора Штурма–Лиувилля

$$L\colon \mathscr{D}_L \to C[0,\ell], \quad Lu = -u'' + qu$$

(где $q \in C[0,\ell]$ — фиксированная неотрицательная функция). Докажите, что $\langle Lu, u\rangle > 0$ для всех $u \in \mathscr{D}_L \setminus \{0\}$ (где $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ — скалярное произведение в $L^2[0,\ell]$). Выведите отсюда, что все собственные значения L положительны; в частности, $\operatorname{Ker} L = 0$.

21.2. Пусть u_1, u_2 — решения уравнения Штурма–Лиувилля $-u'' + qu = 0$. Докажите, что определитель Вронского $W = \left|\begin{smallmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{smallmatrix}\right|$ — константа.

21.3. Докажите, что $\mathscr{D}_L$ (см. задачу 21.1) плотно в $L^2[0,\ell]$.

21.4. Найдите все λ, при которых на отрезке $[0,1]$ имеет решение задача Штурма–Лиувилля $-u'' = \lambda u$, $u(0) = u(1) = 0$. Найдите соответствующие решения и функцию Грина.

21.5. Обобщите все, что было на лекции, на случай задачи Штурма–Лиувилля с граничными условиями $\alpha u(0) + \beta u'(0) = 0$, $\gamma u(\ell) + \delta u'(\ell) = 0$. Как в этом случае выглядит функция Грина?

21.6. Найдите все λ, при которых на отрезке $[0,1]$ имеет решение задача Штурма–Лиувилля
1) $-u'' = \lambda u$, $u(0) = u(1) = 0$;
2) $-u'' = \lambda u$, $u'(0) = u'(1) = 0$.
Найдите соответствующие решения и функцию Грина.

21.7. Из предыдущей задачи выведите тотальность тригонометрической системы в $L^2[-\pi,\pi]$.

21.8. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, $K \in L^2(X\times X, \mu\times\mu)$ и

$$T_K\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu), \quad (T_K f)(x) = \int_X K(x,y) f(y)\, d\mu(y)$$

— интегральный оператор Гильберта–Шмидта (компактный в силу задачи 17.7). Представим оператор T_K в виде

$$T_K f = \sum_n \lambda_n \langle f, e_n\rangle f_n, \tag{1}$$

где (e_n) и (f_n) — ортонормированные системы в $L^2(X,\mu)$; такое разложение всегда возможно в силу теоремы Шмидта. Докажите, что $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$.

21.9. Пусть X — метризуемый компакт, μ — регулярная борелевская мера на X и $K \in C(X\times X)$. Докажите, что образ интегрального оператора Гильберта–Шмидта $T_K\colon L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu)$ содержится в $C(X)$, и что T_K является компактным оператором из $L^2(X,\mu)$ в $C(X)$.

21.10. Пусть X, μ и K — те же, что в предыдущей задаче. Представим оператор T_K в виде (1), где $\lambda_n \neq 0$ для всех n. Докажите, что
1) $f_n \in C(X)$ для всех n;
2) ряд (1) сходится равномерно и абсолютно для каждой $f \in L^2(X,\mu)$;
3) $g = \sum_n \langle g, f_n\rangle f_n$ для любой $g \in \operatorname{Im} T_K$, причем этот ряд сходится равномерно и абсолютно.

21.11. Выведите из предыдущих задач равномерную и абсолютную сходимость рядов Фурье достаточно гладких периодических функций.