Лекции по группам и алгебрам Ли – 11,12

Материал этих лекций содержится в главе 1 книги Винберга и Онищика "Семинар по группам Ли и алгебраическим группам".

Экспоненциальное отображение

Пусть G – связная группа Ли, и $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$. Для $x \in \mathfrak{g}$ обозначим через ξ_x соответствующее правоинвариантное векторное поле. Рассмотрим следующую задачу Коши относительно функции $\varphi_x : \mathbb{R} \to G$:

$$\dot{\varphi}_x = \xi_x,\ \varphi(0) = e.$$

Предложение 1. *Функция $\varphi_x(t)$ определена на всей прямой и удовлетворяет соотношениям $\varphi_x(t+s) = \varphi_x(t)\varphi_x(s)$ и $\varphi_{sx}(t) = \varphi_x(st)$.*

Доказательство. Функция $\varphi_x(t)$ определена в окрестности нуля по теореме существования решения обыкновенного дифференциального уравнения. Заметим, что при фиксированном s функции $\varphi_x(t+s)$ и $\varphi_x(t)\varphi_x(s)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению $\dot{\psi}(t) = \xi_x$ (по переменной t) с одинаковым начальным условием $\psi(0) = \varphi_x(s)$. Следовательно, по теореме единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения, на области определения функция $\varphi_x(t)$ удовлетворяет соотношениям $\varphi_x(t+s) = \varphi_x(t)\varphi_x(s)$, а значит, определена на всей прямой. Далее, при фиксированном s функции $\varphi_{sx}(t)$ и $\varphi_x(st)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению $\dot{\psi}(t) = s\xi_x$ с одинаковым начальным условием $\psi(0) = e$. Значит, $\varphi_{sx}(t) = \varphi_x(st)$. □

Определение 1. *Экспоненциальное отображение* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ определяется так: $\exp(x) := \varphi_x(1)$.

Примеры.

(1) Для аддитивной группы $G = \mathbb{R}$, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ имеем $\varphi_x(t) = tx$ и $\exp(x) = x$.
(2) Для мультипликативной группы $G = \mathbb{R}_+$, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$ имеем $\varphi_x(t) = e^{tx}$ и $\exp(x) = e^x$.
(3) Для $G = GL_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ имеем $\varphi_x(t) = e^{tx}$ и $\exp(x) = e^x$.

Предложение 2. *Отображение* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *гладко, причем* $d_0 \exp = \mathrm{id} : \mathfrak{g} = T_0\mathfrak{g} \to T_eG = \mathfrak{g}$.

Доказательство. Отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$ гладко, так как решение дифференциального уравнения гладко зависят от параметра. Имеем $d_0 \exp(x) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\varphi_{sx}(1) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\varphi_x(s) = x$. □

Предложение 3. *Отображение* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *функториально, т.е. для любого гомоморфизма групп Ли* $\psi : G_1 \to G_2$ *следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\psi} & G_2 \\ \uparrow \exp & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{d_e\psi} & \mathfrak{g}_2. \end{array}$$

Доказательство. В самом деле, всякое правоинвариантное векторное поле при гомоморфизме групп Ли переходит снова в правоинвариантное векторное поле, а значит, и однопараметрическая подгруппа $\varphi_x(t)$ переходит в $\varphi_{d_e\psi(x)}(t)$. □

Из функториальности экпоненциального отображения, в частности, следует, что

(1) $\det e^A = e^{\mathrm{tr}\, A}$.
(2) Если матрица A кососимметрична, то e^A ортогональна.

Теоремы единственности

Теорема 1. *Всякий гомоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ продолжается до гомоморфизма соответствующих связных групп Ли $G_1 \to G_2$ не более, чем одним способом. В частности, всякое представление алгебры Ли интегрируется до представления соответствующей связной группы Ли не более, чем одним способом.*

Доказательство. Из функториальности экспоненциального отображения следует, что гомоморфизм алгебр Ли однозначно задает гомоморфизм групп Ли на некоторой окрестности единицы. Значит, гомоморфизм групп Ли однозначно задан на некоторой открытой подгруппе Ли в G_1 (порожденной этой окрестностью). Так как G_1 связна, то всякая открытая подгруппа в G_1 есть G_1. $\square$

Теорема 2. *Всякой подалгебре Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ соответствует не более одной связной подгруппы Ли $H \subset G$, такой, что $T_eH = \mathfrak{h}$.*

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме, предположим, что есть 2 различные связные подгруппы с данной касательной алгеброй. Тогда их пересечение есть открытая подгруппа в каждой из них. Значит, подгруппы совпадают. $\square$

Пример. *(Обмотка тора)* Пусть $G = S^1 \times S^1$. Выберем в $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^2$ базис x_1, x_2 так, что $exp(ax_1 + bx_2) = e^{2\pi i a} \times e^{2\pi i b}$. Пусть $\mathfrak{h} = \mathbb{R}(x_1 + \alpha x_2)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ иррационально. Тогда $\exp(\mathfrak{h})$ всюду плотно в G, и, следовательно, подалгебре Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ не соответствует *никакой* подгруппы Ли в G.

Виртуальные подгруппы Ли

Определение 2. Подгруппа H в группе Ли G называется *виртуальной подгруппой Ли*, если группа H имеет структуру группы Ли, такую, что вложение $H \to G$ есть гомоморфизм групп Ли.

Пример. Для любого вектора $x \in \mathfrak{g} = T_eG$ соответствующая однопараметрическая подгруппа $\{\exp(tx) \mid t \in \mathbb{R}\}$ есть виртуальная подгруппа Ли. В частности, обмотка тора есть виртуальная подгруппа Ли.

Теоремы существования

Теорема 3. *Всякий гомоморфизм алгебр Ли $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ продолжается до гомоморфизма соответствующих связных групп Ли $\varphi : G_1 \to G_2$. В частности, всякое представление алгебры Ли интегрируется до представления соответствующей связной односвязной группы Ли.*

Доказательство. Поставим каждому (гладкому) пути $x : [0,1] \to \mathfrak{g}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ в соответствие путь $h(t)$ в группе Ли G, полученный как решение дифференциального уравнения

$$\dot{h} = \xi_{x(t)},\ h(0) = e.$$

Обратно, всякому пути $h(t)$ с началом в единице группы соответствует путь $x(t) := R_{h(t)^{-1}*}\dot{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Определим гомоморфизм групп Ли $G_1 \to G_2$ следующим образом: для $g \in G_1$ рассмотрим гладкий путь $g(t)$, такой, что $h(0) = e$, $h(1) = h$. Пусть $x(t)$ – соответствующий путь в алгебре Ли $\mathfrak{g}_1$. Пусть $g(t)$ – путь в группе Ли G_2, соответствующий пути $f(x(t))$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}_2$. Положим $\varphi(h) = g(1)$. Из теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения следует, что φ – гомоморфизм групп Ли (аналогично предложению 1). Осталось проверить корректность определения $\varphi(h)$.

Пусть $h_0(t)$ и $h_1(t)$ – два разных пути в группе G_1 из e в h. Тогда, поскольку группа G_1 односвязна, существует гомотопия $h(t,s)$, связывающая эти пути (т.е. $h(t,0) = h_0(t)$, $h(t,1) = h_1(t)$). Пусть $\xi(t,s) := R_{h(t,s)^{-1}*}\frac{\partial h(t,s)}{\partial t} \in \mathfrak{g}_1$, $\eta(t,s) := R_{h(t,s)^{-1}*}\frac{\partial h(t,s)}{\partial s} \in \mathfrak{g}_1$.

Лемма 1. $\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial s} = [\xi, \eta]$.

Доказательство. Берем вторую производную $\frac{\partial^2 h(t,s)}{\partial t \partial s}$ двумя способами и приравниваем. $\square$

Рассмотрим дифференциальное уравнение на группе G_2:

$$\frac{\partial g(t,s)}{\partial t} = f(\xi(t,s)),\ g(0,s) = e.$$

Лемма 2. *Пусть $g(t,s)$ – решение этого уравнения. Тогда $R_{g(t,s)^{-1}*} \frac{\partial g(t,s)}{\partial s} = f(\eta(t,s))$.*

Доказательство. В самом деле, обе части доказываемого равенства удовлетворяют дифференциальному уравнению на алгебре Ли $\mathfrak{g}_2$:

$$\frac{\partial \zeta(t,s)}{\partial t} = f([\xi(t,s), \eta(t,s)] + \frac{\partial \xi(t,s)}{\partial s})$$

с одинаковым начальным условием $\zeta(0,s) = 0$ (поскольку $g(0,s) = e$). $\square$

Так как $h(1,s) = h$ тождественно, то $\eta(1,s) = 0$. Отсюда $\frac{\partial g(1,s)}{\partial s} = 0$, а значит, $g(1,s)$ постоянно, и, таким образом, $\varphi(h) = g(1,s)$ определено корректно. $\square$

Теорема 4. *Всякой подалгебре Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ соответствует виртуальная подгруппа Ли $H \subset G$, такая, что $T_e H = \mathfrak{h}$.*

Доказательство будет в следующем параграфе, а пока сделаем следующее

Замечание. Согласно теореме Адо, всякая конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{h}$ имеет точное представление $\mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}_N$ для некоторого (большого) N. Применяя теорему 4 к $G = GL_N$, получаем, что для всякой алгебры Ли $\mathfrak{h}$ существует группа Ли с данной алгеброй Ли $\mathfrak{h}$.

Коммутант. Замыкание Мальцева

Предложение 4. *Коммутант G' связной односвязной группы Ли G является в ней (нормальной) подгруппой Ли, причем* $\mathrm{Lie}\, G' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Доказательство. Подпространство $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$ является идеалом, причем фактор $\mathfrak{v} = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ – абелева алгебра Ли. Пусть V – аддитивная группа векторного пространства $\mathfrak{v}$ (т.е. $\mathrm{Lie}\, V = \mathfrak{v}$). Проекция $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{v}$ есть гомоморфизм алгебр Ли. Следовательно, по теореме о существовании гомоморфизма групп Ли, имеется гомоморфизм групп Ли $P : G \to V$, такой, что $d_e P = p$. Заметим, что $\mathrm{Ker}\, P$ является подгруппой Ли в G, причем $\mathrm{Lie}\, \mathrm{Ker}\, P = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}$ и $G' \subset \mathrm{Ker}\, P$, так как группа Ли V абелева. С другой стороны, некоторая окрестность единицы в $\mathrm{Ker}\, P$ содержится в G', так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}$ есть подпространство в $T_e G$, касательное ко всем коммутаторам однопараметрических подгрупп. Следовательно, G' есть объединение связных компонент в $\mathrm{Ker}\, P$. Значит, и G' – подгруппа Ли в G. $\square$

Определение 3. *Замыканием Мальцева* подалгебры Ли $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$ называется минимальная подалгебра Ли $\mathfrak{h}^M \subset \mathfrak{g}$, являющаяся касательной алгеброй подгруппы Ли в G и содержащая $\mathfrak{h}$ (т.е. пересечение всех алгебр Ли подгрупп Ли в G, содержащих $\mathfrak{h}$).

Предложение 5. *Имеем* $[\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}^M] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$.

Доказательство. Многообразие $H_1 := \{g \in G \mid (\mathrm{Ad}(g) - E)\mathfrak{h} \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\}$ есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}_1 := \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(x)\mathfrak{h} \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\}$. Так как $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_1$, то $\mathfrak{h}^M \subset \mathfrak{h}_1$.

Многообразие $H_2 := \{g \in G \mid (\mathrm{Ad}(g) - E)\mathfrak{h}^M \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\}$ есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}_2 := \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}(x)\mathfrak{h}^M \subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]\}$. Так как $\mathfrak{h}^M \subset \mathfrak{h}_1$, то $\mathfrak{h}^M \subset \mathfrak{h}_2$. $\square$

Доказательство теоремы 4. Достаточно доказать теорему для односвязной группы Ли G (поскольку можно перейти к универсальной накрывающей группе). Подалгебры Ли $\mathfrak{h}^M$ и $[\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}^M] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ интегрируются до подгрупп Ли H^M и H'^M в G. Рассмотрим группу Ли H^M/H'^M. Это абелева группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{h}^M/[\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}^M]$. Множество $\exp(\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}^M])$ является в этой группе виртуальной подгруппой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{h}/[\mathfrak{h}^M, \mathfrak{h}^M]$. Полный прообраз H этой виртуальной подгруппы в H^M, очевидно, является снова виртуальной подгруппой в H^M, а значит, и в G.