ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А.В. Колесников

Содержание

1. Многомерные диффузионные процессы

Мы переходим к изучению многомерных диффузионных процессов. Сперва обсудим кратко обобщения основных понятий и основных фактов одномерного стохастического анализа на многомерный случай.

1) Многомерный винеровский процесс

n-мерным винеровским процессом

$$W_t(\omega) = (W_t^1(\omega), \cdots, W_t^n(\omega))$$

называется процесс со значениями в $\mathbb{R}^n$, координаты которого представляют собой n независимых одномерных винеровских процессов. Эквивалентная формулировка — это процесс со значениями в $\mathbb{R}^n$, непрерывными траекториями, независимыми приращениями, стартующий из начала координат и свойством:

2') W_t имеет гауссовское распределение со средним ноль, матрица ковариации приращений $W_t - W_s$ равна $(t-s)E$, где $0 < t < s$, E — единичная матрица

2) Фильтрация, порожденная винеровским процессом

Стандартным потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_{\le t}$, связанных с многомерным винеровским процессом W_t, является поток σ-алгебр $\mathcal{F}_{\le t} = \sigma\{W^1_{s_1}, \cdots, W^n_{s_n}\}$, $s_k \le t$, порожденных случайными величинами W^j_s, $1 \le j \le n$, $0 \le s \le t$.

Как и одномерном случае, винеровским процессом относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$ будем считать такой винеровский процесс W_t, измеримый относительно $\mathcal{F}_t$ при любом t, что $W_{t+h} - W_t$ не зависит от $\mathcal{F}_t$.

3) Уравнение теплопроводности

Функция $u(t,x) = \mathbb{E}u_0(x + W_t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, где $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая ограниченная функция, удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t = \frac{1}{2}\Delta u, \ u(0,x) = u_0(x),$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

— оператор Лапласа.

4) Многомерные стохастические интегралы

Пусть f — случайная функция со значениями в $\mathbb{R}$. Будем требовать, чтобы $f_j(t,\omega)$ была измеримой функцией относительно $\mathcal{F}_t$ и $\mathbb{E}\int_0^T f_j^2(t,\omega)\, dt < \infty$.

Для каждого $1 \le i \le n$ определен стохастический интеграл $\int_0^T f \, dW_t^i$, построение которого сводится к одномерному стохастическому интегралу.

Заметим, что на этом этапе становится существенным, что $f_j(t,\omega)$ измерима, вообще говоря, не только относительно σ-алгебры, порожденной компонентой W_t^j, но относительно более широкой σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ (хотя бы относительно $\mathcal{F}_{\le t}$), чтобы иметь возможность интегрировать выражения вида

$$\int_0^T W_t^2 \, dW_t^1.$$

5) Стохастические дифференциалы

Будем говорить, что процесс $\xi_t(\omega)$ имеет стохастический дифференциал

$$d\xi_t = \sigma \, dW_t + bdt,$$

где $b(t,\omega) \in \mathbb{R}^n$, а $\sigma(t,\omega)$ принимает значения в пространстве матриц $n \times n$, если

$$\xi_t(\omega) = \xi_0(\omega) + \int_{t_0}^t \sigma \, dW_s + \int_{t_0}^t b \, ds,$$

ξ_0 — $\mathcal{F}_{t_0}$-измеримая с.в. Интеграл $\int_{t_0}^t \sigma \, dW_s$ принимает значения в $\mathbb{R}^n$ и понимается как

$$\int_{t_0}^t \sigma \, dW_s = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t (\sigma \cdot e_i) \, dW_s^i,$$

где сумма берется по базису $\{e_i\}$. Например,

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \sigma_{11}(s,\omega) & \sigma_{12}(s,\omega) \\ \sigma_{21}(s,\omega) & \sigma_{22}(s,\omega) \end{pmatrix} dW_s$$
$$= \Big(\int_0^t \sigma_{11}(s,\omega) dW_s^1 + \int_0^t \sigma_{12}(s,\omega) dW_s^2, \int_0^t \sigma_{21}(s,\omega) dW_s^1 + \int_0^t \sigma_{22}(s,\omega) dW_s^2 \Big).$$

6) Стохастическая изометрия

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T f \, dW_t^i \int_0^T g \, dW_t^i \Big) = \int_0^T fg \, dt$$

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^T f \, dW_t^i \int_0^T g \, dW_t^j \Big) = 0, \ i \neq j.$$

Последнее равенство связано с независимостью W_t^i, W_t^j.

7) Формула Ито

Многомерная формула Ито: пусть $u(t,x_1,\cdots,x_n)$ — функция, непрерывно дифференцируемая один раз по t и дважды по x, $\xi_t = (\xi_t^1,\cdots,\xi_t^n)$ — стохастический процесс. Тогда

$$du(t,\xi_t) = u_t(t,\xi_t)dt + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(t,\xi_t) d\xi_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}(t,\xi_t) d\xi_t^i d\xi_t^j.$$

При этом мы считаем, что

$$dW_t^i dW_t^j = 0, \ i \neq j$$

и

$$dW_t^i dW_t^i = dt, \ dW_t^i dt = 0, \ (dt)^2 = 0.$$

Замечание 1.1. *Для вычислений полезно помнить следующий вариант одномерной формулы Ито, который мы оставим без доказательства:*

$$d(\xi_t \eta_t) = \eta_t d\xi_t + \xi_t d\eta_t + d\xi_t d\eta_t.$$

Здесь ξ_t, η_t — одномерные стохастические процессы.

Пример 1.2. *Вычислим $d\big((W_t^1)^2 t W_t^2\big)$. В силу замечания выше*

$$d\big((W_t^1)^2 t W_t^2\big) = d\big((W_t^1)^2 t\big) W_t^2 + \big((W_t^1)^2 t\big) dW_t^2 + d\big((W_t^1)^2 t\big) dW_t^2$$

Поскольку $dW_t^1 dW_t^2 = dW_t^1 dt = 0$, то последнее слагаемое равно нулю. К первому слагаемому применяем одномерную формулу Ито и получаем

$$d\big((W_t^1)^2 t W_t^2\big) = \big((W_t^1)^2 dt + 2W_t^1 t dW_t^1 + t dt\big) W_t^2 + \big((W_t^1)^2 t\big) dW_t^2.$$

Конечно, такой же результат можно было бы получить, применив формулу Ито к функции $u(t,x,y) = tx^2y$. Имеем: $u_t = x^2y$, $u_x = 2xty$, $u_y = tx^2$, $u_{xx} = 2ty$, $u_{xy} = 2xt$, $u_{yy} = 0$. Поэтому

$$d\big((W_t^1)^2tW_t^2\big) = (W_t^1)^2W_t^2dt + 2W_t^1W_t^2tdW_t^1 + t\big(W_t^1\big)^2dW_t^2 + tW_t^2dt.$$

8) Теорема о существовании и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений

   Многомерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t)dW_t + b(\xi_t)dt, \quad \xi_{t_0} = \xi_0, \ t \geq t_0,$$

где с.в. ξ_0 измерима относительно $\mathcal{F}_{t_0}$, имеет единственное решение для липшицевых отображений σ, b. Вектор b называется сносом (shift), а σ — диффузионной матрицей процесса ξ_t.

Марковское свойство диффузий

Далее мы будем изучать процесс ξ_t, $0 < t < T$, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi_t = \sigma(\xi_t)dW_t + b(\xi_t)dt \tag{1}$$

с липшицевыми коэффициентами b, σ:

$$|b(x) - b(y)| + \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq C|x - y|$$

(здесь под $|\cdot|$ понимается стандартная векторная норма, а под $\|\cdot\|$ — стандартная операторная норма).

Обозначим через $\xi_s(t,x)$ решение (2) с начальным условием $\xi_t = x$, $t < s$, т.е.

$$\xi_s = x + \int_t^s \sigma(\xi_r)dW_r + \int_t^s b(\xi_r)dr$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \xi_s =& x + \Big(\int_t^u \sigma(\xi_r)dW_r + \int_t^u b(\xi_r)dr\Big) + \Big(\int_u^s \sigma(\xi_r)dW_r + \int_u^s b(\xi_r)dr\Big) \\ =& \ \xi_u + \Big(\int_u^s \sigma(\xi_r)dW_r + \int_u^s b(\xi_r)dr\Big). \end{aligned}$$

В силу теоремы единственности решения стохастических дифференциальных уравнений, из этого соотношения следует **эволюционное свойство** решений стохастических дифференциальных уравнений

$$\xi_s(t,x) = \xi_s(u, \xi_u(t,x)).$$

Марковское свойство случайного процесса неформально может быть выражено следующим образом: зависимость будущего процесса от прошлого является функцией настоящего. Формализовать это определение можно следующим образом. Зафиксируем произвольную непрерывную и ограниченную функцию $g(x)$. Найдем условное математическое ожидание

$$\mathbb{E}g(\xi_s(t,x)|\mathcal{F}_u), \ t \leq u \leq s.$$

Если мы имеем дело с марковским процессом, то полученная случайная величина должна "зависеть только от настоящего", то есть быть функцией $\xi_u(t,x)$. Так оно и есть. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.3. *Обозначим $f(t,s,x) = \mathbb{E}g(\xi_s(t,x))$. Тогда*

$$\mathbb{E}g(\xi_s(t,x)|\mathcal{F}_u) = f(u,s,\xi_u(t,x)).$$

Идея доказательства: Приблизим $\xi_s(t,x)$ процессом $\xi_s^m(t,x)$ со счетным числом значений Γ_m, измеримым относительно $\mathcal{F}_s$ при всех $t \leq s \leq T$.

Для доказательства искомого соотношения достаточно доказать, что

$$\mathbb{E}\big(\eta \cdot g(\xi_s(t,x)\big) = \mathbb{E}\big(\eta f(u,s,\xi_u(t,x))\big)$$

для любой ограниченной η, измеримой относительно $\mathcal{F}_u$.

Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(\eta\cdot g(\xi_s(t,x)\big) =&\mathbb{E}\big(\eta\cdot g(\xi_s(u,\xi_u(t,x))\big) = \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\big(\eta\cdot g(\xi_s(u,\xi_u^m(t,x))\big)\\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{\Gamma_m}\mathbb{E}\big(\eta\cdot g(\xi_s(u,y))I_{\xi_u^m(t,x)=y}\big) = \lim_{m\to\infty}\sum_{\Gamma_m}\mathbb{E}\big(\eta I_{\xi_u^m(t,x)=y}\big)\cdot\mathbb{E}g(\xi_s(u,y))\end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено в силу независимости $\xi_s(u,y)$ от $\mathcal{F}_u$ (так как $\xi_s(u,y)$ — решение стохастического ДУ с *неслучайным* начальным условием, *стартующее* в точке u!). Далее

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\sum_{\Gamma_m}\mathbb{E}\big(\eta I_{\xi_u^m(t,x)=y}\big)\cdot\mathbb{E}g(\xi_s(u,y)) &= \lim_{m\to\infty}\sum_{\Gamma_m}\mathbb{E}\big(\eta I_{\xi_u^m(t,x)=y}\big)\cdot f(u,s,y)\\ &= \lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\big(\eta f(u,s,\xi_u^m(t,x))\big) = \mathbb{E}\big(\eta f(u,s,\xi_u(t,x))\big).\end{aligned}$$

Полугруппа операторов

Аналитическая интерпретация марковского свойства может быть сделана на языке полугрупп линейных дифференциальных операторов. Положим

$$T_{t,s}g = \mathbb{E}g(\xi_s(t,x)).$$

Отображение $g\to T_{t,s}g$ является линейным оператором, действующем на пространстве ограниченных борелевских функций.

Теорема 1.4. *Семейство операторов $T_{s,t}$ образуют полугруппу:*

$$T_{u,s}\big(T_{t,u}g\big) = T_{t,s}g,\quad t\le u\le s.$$

Доказательство. В предыдущей теореме положим: $\eta=1$. □

Занятие 1

1) Для двумерного винеровского процесса $W_t=(W_t^1,W_t^2)$ найти $P(|W_t|\le R)$.
2) Докажите, что если W_t — многомерный винеровский процес, а O — ортогональный линейный оператор, то OW_t — винеровский процесс.
3) Найдите стохастический дифференциал следующих процессов: 1) $\ln\big((W_t^1)^2+(W_t^2)^2\big),\ t\ne 0$, 2) $\frac{1}{\sqrt{(W_t^1)^2+(W_t^2)^2+(W_t^3)^2}}, t\ne 0$.
4) Докажите, что процесс $X_t=(X_t^1,X_t^2)=(a\cos W_t^1, b\sin W_t^1)$ является решением стохастического ДУ
$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + MX_t\ dW_t^1,\quad M=\begin{pmatrix}0 & -a/b\\ b/a & 0\end{pmatrix}.$$
Выпишите его снос и матрицу диффузии.
5) Докажите, что если процесс $d\xi_t=\sigma dW_t+bdt$ имеет стохастический дифференциал, где $\sigma(t,\omega)$ — матрица $n\times n$, $b(t,\omega)=(b_1(t,\omega),\cdots,b_n(t,\omega))$ — вектор, W_t — n-мерный винеровский процесс, то
$$du(t,\xi_t) = \sigma^T\nabla u(t,\xi_t)dW_t + Lu(t,\xi_t)dt,$$
где
$$Lu = u_t + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}(t,\xi_t)\rangle + \sum_{i,j=1} A_{ij}u_{x_ix_j}(t,\xi_t),\quad A=(A_{ij})=\frac{1}{2}\sigma\sigma^T.$$
6) Докажите прямыми вычислениями, что следующие операторы действительно обладают полугрупповым свойством $T_{t+s}=T_t(T_s)$:
   1) полугруппа Орнштейна-Уленбека
$$T_tf(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y)e^{-\frac{1}{2}y^2}\ dy,$$
   2) полугруппа геометрического броуновского движения
$$T_tf(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int f(xe^{at+by})e^{-\frac{y^2}{2t}}\ dy.$$
7) Докажите прямыми вычислениями, что одномерный процесс геометрического броуновского движения $\xi_t = xe^{at+bW_t}$ является марковским.

2. Формула Дынкина для многомерных процессов. Уравнения Колмогорова.

В дальнейшем нас будет интересовать поведение полугруппы T_t, определенной как семейство линейных операторов
$$T_t f \to u(t,x) = \mathbb{E} f(\xi_t(x)),$$
где
$$\xi_t = x + \int_0^t \sigma(\xi_s) dW_s + \int_0^t b(\xi_s) ds \tag{2}$$
— решение стохастического дифференциального уравнения с липшицевыми коэффициентами b, σ. Как мы знаем, полугруппа T_t обладает свойством
$$T_{t+s} = T_t(T_s) = T_s(T_t).$$

Упражнение 2.1. *Выведите это свойство из теоремы 1.4.*

Всюду далее через Lf мы обозначаем следующее выражение
$$Lf = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\big(\sigma\sigma^T D^2 f\big) + \langle b, \nabla f\rangle,$$
где под $D^2 f$ имеется ввиду матрица вторых производных.

Теорема 2.2. *(Формула Дынкина) Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными производными первого и второго порядка. Тогда для любого ограниченного марковского момента τ*
$$\mathbb{E} f(\xi_\tau(x)) = f(x) + \mathbb{E}\Big(\int_0^\tau Lf(\xi_s(x)\ ds\Big).$$

Доказательство. В основе доказательства лежит формула Ито, примененная к процесссу $f(\xi_t(x))$. Согласно этой формуле стохастический дифференциал $f(\xi_t(x))$ имеет вид.
$$df(\xi_t) = \sigma^T(\xi_t) \nabla f(\xi_t) dW_t + Lf dt$$
(см. упражнения). Под записью $g dW_t$, где $g = (g_1, \cdots, g_n)$ — векторнозначная фукнция имеется ввиду $\sum_{i=1}^n g_i\ dW_t^i$.

Таким образом
$$f(\xi_t(x)) = f(x) + \int_0^t \sigma^T(\xi_s) \nabla f(\xi_s) dW_s + \int_0^t Lf(\xi_s(x))\ ds.$$
Заметим, что $M_t = \int_0^t \sigma^T \nabla f(\xi_s) dW_s$ — мартингал, следовательно $\mathbb{E} M_\tau = 0$. Поэтому $\mathbb{E} f(\xi_\tau(x)) = f(x) + \mathbb{E} \int_0^\tau Lf(\xi_s(x))\ ds$. Что и требовалось доказать. □

Пример 2.3. *(см. [4], пример 7.11). Применяя формулу Дынкина к функции $f = |x|^2$ находим, что среднее время выхода винеровского процесса из шара радиуса R равно $\frac{R^2}{d}$.*

Рассмотрим винеровский процесс $W_t(b) = b + W_t$, стартующий из точки b. Какова вероятность, того что $W_t(b)$ столкнется с шаром $B_r = \{|x| \le r\}$, $r < |b|$? Применяя формулу Дынкина к функции $f = \ln |x|$, можно показать, что столкновение произойдет с вероятностью 1, если размерность пространства равна 2. Если размерность больше 2, можно показать, что такая вероятность меньше 1 .

Генератором полугруппы операторов P_t, $P_0 = I$, называется оператор
$$Af = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f - f}{t}.$$
Оказывается, генератором диффузионной полугруппы T_t является дифференциальный оператор L.

Замечание 2.4. *Формально полугруппа операторов может быть восстановлена по своему генератору по формуле $P_t = e^{tL}$. Этому соотношению можно придать точный смысл для многих классов операторов.*

Лемма 2.5. *Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными производными первого и второго порядка. Тогда*
$$\lim_{t\to 0} \frac{T_t f - f}{t} = Lf.$$

Доказательство. Заметим сперва, что по формуле Дынкина

$$\frac{u(t,x)-u(0,x)}{t} = \frac{\mathbb{E}f(\xi_t(x))-f(x)}{t} = \frac{1}{t}\mathbb{E}\Bigl(\int_0^t Lf(\xi_s(x))\ ds\Bigr).$$

В силу того, что выражение $Lf(\xi_s(x,\omega))$ непрерывно для почти каждого $\omega\in\Omega$, $\lim_{t\to 0}\frac{\int_0^t Lf(\xi_s(x))\ ds}{t} = Lf(x)$ почти всюду. Переходя к пределу, получаем $\lim_{t\to 0}\frac{u(t,x)-u(0,x)}{t} = Lu(0,x)$.

Для обоснования предельного перехода, заметим, что в силу ограниченности первых и вторых производных, а так же липшицевости σ и b

$$\frac{1}{t}\Bigl(\int_0^t Lf(\xi_s(x))\ ds\Bigr) \le \frac{1}{t}\Bigl(\int_0^t C(1+|\xi_s|^2)\ ds\Bigr) \le C(1+\sup_{0\le s\le t}|\xi_s|^2).$$

Таким образом, по теореме Лебега достаточно доказать интегрируемсть с.в. $\eta=\sup_{0\le s\le t}|\xi_s|^2$. Используем представление $\xi_t = x+\int_0^t\sigma(\xi_s)\ dW_s+\int_0^t b(\xi_s)\ ds$. Из доказательства теоремы о существовании и единственности решений СДУ ясно, что при фиксированном x имеем: $\sup_{0\le s\le t}\mathbb{E}\xi_s^2<\infty$. Осталось заметить, что в силу липшицевости

$$\sup_{0\le s\le t}\Bigl(\int_0^s b(\xi_u)du\Bigr)^2 \le C_1\sup_{0\le s\le t} s\int_0^s |b(\xi_u)|^2du \le C_2 t\int_0^t|\xi_u|^2du.$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}\Bigl(\sup_{0\le s\le t}\Bigl(\int_0^s b(\xi_u)du\Bigr)^2\Bigr) \le C_2t^2\sup_{0\le s\le t}\mathbb{E}|\xi_u|^2<\infty.$$

Для оценки $\mathbb{E}\Bigl(\sup_{0<s<t}\int_0^s\sigma_{ij}(\xi_u)\ dW_u^j\Bigr)^2$ возпользуемся тем, что $\bigl(\int_0^s\sigma_{ij}(\xi_u)\ dW_u^j\bigr)^2$ — субмартингал.

$$\mathbb{E}\Bigl(\sup_{0<s<t}\int_0^s\sigma_{ij}(\xi_u)\ dW_u^j\Bigr)^2 \le \mathbb{E}\Bigl(\int_0^t\sigma_{ij}(\xi_u)\ dW_u^j\Bigr)^2 = \mathbb{E}\Bigl(\int_0^t\sigma_{ij}^2(\xi_u)\ du\Bigr) \le C\int_0^t\mathbb{E}(1+|\xi_u|^2)\ du<\infty.$$

Лемма доказана. □

Вспомним теперь что $u(t+h,x)=T_{t+h}f=T_h(T_tf)$. Поэтому, формально применяя результат леммы, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\lim_{h\to 0}\frac{T_h(T_tf)-T_tf}{h}=LT_tf=Lu(t,x).$$

Мы получили важный результат теории диффузионных процессов.

Теорема 2.6. *(Уравнения Колмогорова) Пусть* $u(t,x)=\mathbb{E}f(\xi_t(x))$*— дважды непрерывно дифференцируемая функция с ограниченными производными первого и второго порядка. Тогда* $u(t,x)$ *является решением следующего параболического уравнения*

$$u_t=Lu,\ \ u(0,x)=f(x).$$

Замечание 2.7. *Конечно, заранее требовать гладкость u — очень ограничительное условие. Это требование можно опустить, потребовав гладкость коэффициентов* σ, b*. В таком случае u автоматически окажется гладкой функцией. Результаты такого рода технически довольно трудны и мы не будем касатся их в этом курсе.*

Занятие 2

1) Найти снос, диффузионную матрицу и генератор диффузии для процессов

$$dX_t=-\frac{1}{2}X_tdt+MX_t\ dW_t^1,\quad M=\begin{pmatrix}0 & -a/b\\ b/a & 0\end{pmatrix}.$$

$$dX_t=\begin{pmatrix}1\\ X_t^1\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}1 & 0\\ X_t^1 & X_t^2\end{pmatrix}dW_t,\quad X_t=(X_t^1,X_t^2).$$

2) Найти генератор диффузии $\xi_t=xe^{at+bW_t}$ (геометрическое броуновское движение).
3) (Уравнение Блэка-Шоулза). Напомним, что цена call-опциона C с процентной ставкой r и периодом истечения T вычисляется по формуле $C(T,S_0)=e^{-rT}\mathbb{E}\max\bigl(0,S_T-K\bigr)$, где S_t является решением СДУ: $dS_t=rS_tdt+\sigma S_tdW_t$. Положим теперь для произвольных $0\le t\le T$ и $S>0$

$$C(t,S)=e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\max\bigl(0,S_T-K\bigr),$$

где S_u является решением СДУ

$$dS_u = rS_u du + \sigma S_u dW_u,\ t \le u \le T,\ S_t = S,$$

т.е. $C(t, S)$ — цена опциона в момент $0 \le t \le T$, при условии, что $S_t = S$. Используя уравнения Колмогорова докажите, что $C(t, S)$ удовлетворяет *уравнению Блэка-Шоулза*

$$\frac{\partial C}{\partial t} = rC - rS\frac{\partial C}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}.$$

4) В условиях предыдущей задачи покажите, что процесс $C(t, S_t) - r\int_0^t C(u, S_u)\, du$ — мартингал.
5) (См. пример 2.3) Найти гармоническую радиально симметричную функцию для размерности $n > 2$ и доказать, что винеровский процесс $W_t(b) = b + W_t$, стартующий из точки b, с ненулевой вероятностью избежит столкновения с шаром $B_r = \{|x| \le r\}$, $r < |b|$.

3. Марковские цепи с дискретным временем

Определение 3.1. *Последовательность случайных величин $\{X_n\}$, $n \ge 0$ со значениями в некотором не более чем счетном множестве S (множестве состояний) называется (однородной) марковской цепью, если для любых значений $k_i \in S$ выполнено соотношение*

$$P(X_{n+1} = k | X_0 = k_0, \cdots, X_n = k_n) = P(X_{n+1} = k | X_n = k_n) = P(X_1 = k | X_0 = k_n)$$

(будущее зависит от прошлого через настоящее).

Пример 3.2. *Пусть $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, где $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых бернуллиевских с.в. Тогда $\{X_n\}$ — марковская цепь. Действительно,*

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k | X_0 = k_0, \cdots, X_n = k_n) &= P(X_{n+1} - X_n = k - k_n | X_0 = k_0, \cdots, X_n = k_n) \\ &= P(X_{n+1} - X_n = k - k_n) = P(\xi_i = k - k_n) = P(X_1 = k | X_0 = k_n). \end{aligned}$$

Замечание 3.3. *Почти везде ниже мы будем считать, что S конечно : $|S| = d < \infty$.*

Величина

$$p_{ik} = P(X_1 = k | X_0 = i)$$

называется переходной вероятностью. Ее можно интерпретировать как вероятность перехода цепи из состояния i в состояние k за единицу времени. Матрица P: $(P)_{ik} = p_{ik}$ называется матрицей перехода. Очевидно следующее свойство:

$$\sum_{k \in S} p_{ik} = 1.$$

Из определения марковской цепи видно, что распределение X_n полностью определяется X_0 и матрицей P.

Пример 3.4. *Простейший пример: марковская цепь с двумя состояниями, матрица перехода которой задается так:*

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$.

Часто марковскую цепь удобно изображать в виде графа, где состояния соединены направленными стрелками (направление стрелки от состояния i к состоянию k соответствуют вероятности p_{ik}).

Упражнение 3.5. *([2], пример 1.1.2). Изобразите граф, соответствующий матрице перехода*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Наша ближайшая цель — выразить распределение X_n через начальное распределение X_0 и матрицу P.

Упражнение 3.6. *Докажите, что*

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0)p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Предположим теперь, что распределение с.в. X_0 задано вектором (строкой) λ:

$$P(X_0 = i) = \lambda_i, \ \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$$

Тогда, как нетрудно видеть

$$P(X_1 = k) = \sum_{i \in S} P(X_1 = k | X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i \in S} \lambda_i p_{ik}.$$

Т.е., распределение вероятностей с.в. X_1 задается вектором

$$\lambda P$$

(умножение происходит слева!). Рассуждая по индукции, мы приходим к выводу, что распределение X_n задается вектором

$$\lambda P^n.$$

Пример 3.7. ([2], *пример 1.16.18) Блоха прыгает по вершинам треугольника, перепрыгивая на одну из свободных вершин с вероятностью* $1/2$. *Найти вероятность, что через* n *прыжков она окажется на месте старта.*

Матрица переходных вероятностей равна

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Искомая вероятность равна диагональному элементу матрицы P^n. *С помощью системы собственных векторов матрицы* P *найдите* P^n *и докажите, что искомая вероятность равна* $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Упражнение 3.6 обобщается следующим образом.

Теорема 3.8.

$$P(X_{k_1} = i_1, \cdots, X_{k_n} = i_n) = (\lambda P^{k_1})_{i_1} (P^{k_2 - k_1})_{i_1 i_2} \cdots (P^{k_n - k_{n-1}})_{i_{n-1} i_n}.$$

Занятие 3

1) В библиотеке разрешено иметь на руках не более одной книги. Каждое воскресенье я иду в библиотеку и либо беру новую книгу, либо продлеваю старую (если ее еще не прочитал). Книга с номером r требует W_r недель для чтения, где W_r — последовательность независимых одинаково распределенных с.в. Пусть X_n — число продлений книги, с котороя я выхожу из библиотеки в n-е воскресенье. Доказать, что $\{X_n\}$ — марковская цепь и найти матрицу переходных вероятностей.
2) Пусть $\{X_n\}$ — независимые одинаково распределенные с.в. Какие последовательноси являются марковскими? Найти переходные вероятности для тех из них, которые являются марковскими. 1) $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 2) $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$, 3) $L_n = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$, 4) $K_n = X_n + X_{n-1}$.
3) A, B, C играют в теннис. Играют двое, победитель играет в следующей игре. Вероятность победы в партии x против y равна $S_x/(S_x + S_y)$ (S_A, S_B, S_C — некоторые положительные числа). Найти вероятность того, что в четвертой игре будут играть те же, кто играл в первой. Покажите, что эта вероятность не зависит от состава игроков первой партии.
4) 1) Докажите следующие соотношения для произвольной марковской цепи X_n: $P(X_4 = k | X_1 = i, X_2 = j) = P(X_4 = k | X_2 = j)$, $P(X_4 = k | X_2 = i, X_3 = j) = P(X_4 = k | X_3 = j)$.
   2) Пусть $\{X_n\}$ — марковская цепь. Доказать, что $\{X_{2n}\}$ — марковская цепь.
5) Вирус может находится в N состояниях. За единицу времени он с вероятностью $1 - \alpha$ сохраняет свое состояние, а в любое другое переходит с вероятностью $\alpha/(N-1)$. Какова вероятность, что через n единиц времени он сохранит свое состояние?

4. Инвариантные распределения.

Определение 4.1. *Марковская цепь называется регулярной, если существует такое n_0, что $(P^{n_0})_{ij} > 0$ для любых $i, j \in S$.*

Определение 4.2. *Марковская цепь называется неприводимой, если для любых $i, j \in S$ существует такое n_0, что $(P^{n_0})_{ij} > 0$.*

Пример 4.3. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *цепь регулярна для P и приводима и нерегулярна для Q.*

Определение 4.4. *Для состояний $i \neq k$ обозначим через T_{ik} первый момент достижения k для цепи, стартовавшей из i: $T_{ik} = \min\{n \geq 0 : X_n = k | X_0 = i\}$, а через $\mu_{ik} = \mathbb{E}T_{ik}$ — среднее время достижения k.*

Для состояния i обозначим через T_i первый момент возвращения в i для цепи, стартовавшей из i: $T_i = \min\{n > 0 : X_n = i | X_0 = i\}$, а через $\mu_i = \mathbb{E}T_i$ — среднее время возвращения в i.

Нетрудно придумать примеры, когда $P(T_{ik} = \infty) > 0$ ([5], пример 9.3.6). Такая ситуация осуществима, например, благодаря так называемым поглощающим состояниям. Тем не менее, имеет место следующая теорема.

Теорема 4.5. *([5], теорема 9.3.15). Если цепь регулярна, то T_{ik} имеет конечное среднее. Более того, $P(T_{ik} > n) \leq c\lambda^n$ для некоторых констант $c > 0, \lambda < 1$.*

Упражнение 4.6. *([2], пример 1.3.6.) Лягушка прыгает вверх по лестнице из N ступеней. При прыжке с подножия лестницы (нулевая ступень) она с вероятностью $\beta >$ оказывается на первой ступени, а с вероятностью $1 - \beta$ остается на месте. После прыжка на других ступенях она с вероятностью $\alpha > 0$ оказывается на ступень выше, с вероятностью α на ступень ниже, с вероятностью $1 - 2\alpha$ остается на месте. Докажите, что среднее количество прыжков, которое она совершит, прежде чем достигнет лестницы, равно $\frac{N(N-1)}{2\alpha} + \frac{N}{\beta}$.*

В дальнейшем нам понадобится следующая версия *сильного марковского свойства*

Теорема 4.7. *(Сильное марковское свойство) Пусть T — первый момент достижения цепью состояния d. Выполнено следующее соотношение:*

$$P(X_{T+m} = k | X_r = x_r,\ 1 \leq r \leq T,\ X_T = d) = (P^m)_{dk}$$

для $x_r \neq d$.

Доказательство. Обозначим событие $\{X_r = x_r,\ 0 \leq r < T\}$ через $A(T)$. Тогда

$$P(X_{T+m} = k | X_r = x_r,\ 0 \leq r \leq T,\ X_T = d) = \frac{P(X_{T+m} = k, A(T), X_T = d)}{P(A(T), X_T = d)}.$$

$$P(X_{T+m} = k, A(T), X_T = d) = \sum_{t=1}^{\infty} P(X_{t+m} = k, A(t), T = t, X_t = d)$$
$$= \sum_{t=1}^{\infty} P(X_{t+m} = k | A(t), T = t, X_t = d) P(A(t), T = t, X_t = d) = \sum_{t=1}^{\infty} (P^m)_{dk} P(A(t), T = t, X_t = d)$$
$$= (P^m)_{dk} P(A(T), X_T = d).$$

□

Определение 4.8. *Вероятностное распределение $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_d))$ на S называется инвариантным относительно цепи $\{X_n\}$, если $\pi P = \pi$, где P — соответствующая матрица перехода.*

Упражнение 4.9. *Найдите инвариантные распределения для* $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$.

Теорема 4.10. *Регулярная марковская цепь обладает инвариантным распределением π.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное состояние $s \in S$. Предположим, что $X_0 = s$. Пусть $\rho_k(s)$ — среднее число посещений состояния k между возвращением в состояние s. Докажем, что мера вида $\pi_k = \frac{\rho_k(s)}{\mu_s}$ — инвариантная (считаем, что $\rho_s(s) = 1$). Здесь $\mu_s = \mathbb{E}T_s$ — среднее время возвращения в состояние s.

Зафиксируем $k \in S, k \neq s$. Пусть $I_n = \{X_n = k, X_i \neq s, 0 < i \leq n\} = \{X_n = k, T_s \geq n\}$. Общее число посещений k до возвращения в s равно

$$R_k = \sum_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Очевидно, время возвращения в s равно

$$T_s = 1 + \sum_{k \neq s} R_k.$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей.

$$\mu_s = \sum_{k \in S} \rho_k(s).$$

По определению $\rho_k(s)$:

$$\rho_k(s) = \mathbb{E}R_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}I_n = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = k, T_s \geq n).$$

Очевидно, для $n = 1$ имеем: $P(X_1 = k, T_s \geq 1) = p_{sk}$. Для $n \geq 2$

$$P(X_n = k, T_s \geq n) = \sum_{j \neq s} P(X_n = k, X_{n-1} = j, T_s \geq n-1) =$$

$$= \sum_{j \neq s} P(X_n = k | X_{n-1} = j, T_s \geq n-1) P(X_{n-1} = j, T_s \geq n-1).$$

В силу сильного марковского свойства последнее выражение равно $\sum_{j \neq s} p_{jk} P(X_{n-1} = j, T_s \geq n-1)$. Отсюда следует, что

$$\rho_k(s) = p_{sk} + \sum_{j \neq s} p_{jk} \rho_j(s) = p_{sk} + \sum_{n \geq 2} \sum_{j \neq s} p_{jk} P(X_{n-1} = j, T_s \geq n-1)$$

$$= p_{sk} + \sum_{j \neq s} p_{jk} \rho_k(s) = \sum_j p_{jk} \rho_j(s).$$

Разделив выражение на μ_s, получаем инвариантность π. □

Теорема 4.11. *Для регулярной марковской цепи инвариантное распределение* π *единственно, причем*

$$\pi_s = \frac{1}{\mu_s},$$

Доказательство. Напомним, что $T_{ik} = \min\{n \geq 0, X_n = k | X_0 = i\}$ $(T_{kk} = 0, \mu_{kk} = 0)$, $\mu_{ik} = \mathbb{E}T_{ik}$. Для $i \neq k$ в силу марковского свойства

$$\mu_{ik} = \sum_j p_{ij}(1 + \mu_{jk}) = 1 + \sum_j p_{ij} \mu_{jk}.$$

Аналогично, для времени возвращения

$$\mu_k = 1 + \sum_j p_{kj} \mu_{jk}.$$

Следовательно

$$\mu_{ik} + \delta_{ik} \mu_k = 1 + \sum_j p_{ij} \mu_{jk}$$

Тогда

$$\sum_i \pi_i \mu_{ik} + \sum_i \pi_i \delta_{ik} \mu_k = 1 + \sum_i \sum_j \pi_i p_{ij} \mu_{jk}.$$

В силу инвариантности последнее слагаемое равно $\sum_i \pi_i \mu_{ik}$. Таким образом $1 = \sum_i \pi_i \delta_{ik} \mu_k = \pi_k \mu_k$. □

Замечательным обстоятельством является тот факт, что при весьма общих обстоятельствах при больших значениях n наблюдается сходимость процесса к инвариантному распределению (эргодичность).

Теорема 4.12. *Предположим, что существует предел* $\Pi_{ij} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$. *Тогда каждая строка* $\pi^{(i)}$ *матрицы* Π *задает инвариантное распределение.*

Доказательство.

$$(\pi^{(i)}P)_j = \sum_l \pi_{il}p_{lj} = \lim_n \sum_l p_{il}^{(n)}p_{lj} = \lim_n p_{ij}^{(n+1)} = (\pi^{(i)})_j.$$

□

Теорема 4.13. (Эргодическая теорема) *(*[5], *теорема 9.5.1). Пусть* $\{X_n\}$ *— регулярная марковская цепь. Для любых* i, k *существует предел* $\pi_k = \lim_{n\to\infty} p_{ik}(n)$. *При этом* $\pi = (\pi_0, \cdots, \pi_d)$ *является инвариантным распределением.*

Занятие 4

1) Выполнена ли эргодическая теорема для следующих марковских цепей?

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

2) Доказать, что для цепи с двумя состояниями имеется следущая альтернатива: 1) цепь эргодична, 2) состояния не сообщаются, 3) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3) Пусть S_n — число успехов в схеме Бернулли. Доказать, что $Z_n = mod(S_n, 10)$ — марковская цепь, найти ее переходные вероятности и инвариантное распределение.
4) N блох распределены на двух собаках. Каждую секунду выбирается случайным образом одна блоха из N возможных. Эта блоха перепрыгивает на другую собаку. Пусть X_n — число блох на первой собаке. Доказать, что $\{X_n\}$ — марковская цепь и найти ее инвариантное распределение (биномиальное).
5) Рассмотрим случайное блуждание $\{X_n\}$ на $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Для $0 < p < 1$ положим: $p_{00} = 1 - p, p_{0,1} = p, p_{n,n+1} = p, p_{n,n-1} = 1 - p$. При каких p существует инвариантное распределение?
6) Частица совершает случайные блуждания на кубе. В единицу времени с вероятностью $1/4$ она остается на месте, с вероятностью $1/4$ перемещается на соседнюю вершину. Пусть a, b — две противоположнве вершины куба, частица начинает свой путь из a. Найти: 1) среднее время возвращения в a (8), 2) среднее время достижения b (40/3), 3) среднее число посещений b до возвращения в a (1).

7*) (Марковское свойство и производящие функции)

1) Пусть $P_{ik}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ik}(n)z^n$ — производящая функция марковской цепи, $F_{id}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_{id} = n)z^n$, $F_{dd}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_d = n)z^n$ — производящие функции времен достижения и возвращения. Докажите, что

$$P_{ik} = F_{ik}P_{kk},\ P_{ii} = 1 + F_{ii}P_{ii},\ i \neq k.$$

2) Рассмотрим случайное блуждание на $\mathbb{Z}$: $X_0 = 0$; $X_{i+1} = X_i + 1$ с вероятностью p, $X_{i+1} = X_i - 1$ с вероятностью $q = 1 - p$. Докажите, что $F_{00} = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)z^2}$.

Список литературы

[1] Вентцель А.Д., Курс теории случайных процессов. М. Наука, 1975.
[2] Кельберт М.Я., Сухов Ю.М., Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т.2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процесссов и их приложения, М.: МЦНМО, 2010.
[3] Krylov N.V., Introduction to the theory of diffusion processes. Transl. Math. Monographs (142), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
[4] Øksendal B., Stochastic differential equations, 1992.
[5] Stirzaker D., Elementary probability, Cambrige University Press, 2003.