Задачи по комплексному анализу 7, 10.5.2011–24.5.2011

1. Докажите, что a) если $k>1$ — натуральное число, то $G_{2k}(\tau):=\sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m\tau+n)^{-2k}$ абсолютно сходится и является модулярной формой веса $2k$; b) $G_{2k}(i\infty)=2\zeta(2k)=(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k}$ (см. задачу 7 листочка 2); c) $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n+\tau)^{-k}=\frac{1}{(k-1)!}(-2\pi i)^k\sum_{m=1}^{\infty}m^{k-1}q^m$ (напомним, что $q=\exp(2\pi i\tau)$); d) Если обозначить через $\sigma_k(n)$ сумму k-ых степеней всех натуральных делителей n, и перенормировать ряд Эйзенштейна $E_{2k}(\tau):=\frac{1}{2\zeta(2k)}G_{2k}(\tau)$, то $E_{2k}(\tau)=1-\frac{2k}{B_{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n$. Например, $E_4=1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n$, $E_6=1-504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n$, $E_8=1+480\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_7(n)q^n$, $E_{10}=1-264\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_9(n)q^n$, $E_{12}=1+\frac{65520}{691}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{11}(n)q^n$, $E_{14}=1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{13}(n)q^n$. e) $E_4^2=E_8$, $E_4E_6=E_{10}$; f) $\sigma_7(n)=\sigma_3(n)+120\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(m)\sigma_3(n-m)$, $11\sigma_9(n)=21\sigma_5(n)-10\sigma_3(n)+5040\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(n)\sigma_5(n-m)$.

2. Докажите, что a) если $E_{2k}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^n$, то найдутся постоянные A,B такие, что $An^{2k-1}\leq|a_n|\leq Bn^{2k-1}$; b) если же $f(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ — *параболическая* модулярная форма веса $2k$, то $|f(\tau)|y^k$ (где $\tau=x+iy$) инвариантна относительно $SL(2,\mathbb{Z})$; c) существует константа M такая, что $|f(\tau)|\leq My^{-k}$; d) $a_n=\displaystyle\int_0^1 f(x+iy)q^{-n}dx\ \Rightarrow\ |a_n|\leq My^{-k}\exp(2\pi ny)$, в частности, при $y=1/n$, получаем $|a_n|\leq e^{2\pi}Mn^k$, т.е. $a_n=O(n^k)$. Это теорема Гекке.

3. Рассмотрим ряды (суммы по всем (m,n), не обнуляющимся одновременно, в указанном порядке) $G_2(\tau):=\sum_n\sum_m(m+n\tau)^{-2}$, $G(\tau):=\sum_m\sum_n(m+n\tau)^{-2}$, $H_2(\tau):=\sum_n\sum_m(m-1+n\tau)^{-1}(m+n\tau)^{-1}$, $H(\tau):=\sum_m\sum_n(m-1+n\tau)^{-1}(m+n\tau)^{-1}$. Докажите, что a) $H_2(\tau)\equiv 0$, $H(\tau)=-2\pi i/\tau$ (из формулы $(m-1+n\tau)^{-1}(m+n\tau)^{-1}=(m-1+n\tau)^{-1}-(m+n\tau)^{-1})$; b) Двойной ряд с общим членом $(m-1+n\tau)^{-1}(m+n\tau)^{-1}-(m+n\tau)^{-2}=(m+n\tau)^{-2}(m-1+n\tau)^{-1}$ сходится абсолютно, откуда $G_2-H_2=G-H$, ряды G и G_2 сходятся, и $G_2(\tau)-G(\tau)=H_2(\tau)-H(\tau)=2\pi i/\tau$; c) $G_2(-1/\tau)=\tau^2G(-1/\tau)$, откуда $G_2(-1/\tau)=\tau^2G_2(\tau)-2\pi i\tau$; d) $G_2(\tau)=\frac{\pi^2}{3}-8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n$. e) Логарифмическая производная функции $F(\tau):=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$ равна $\frac{dq}{q}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right)=\frac{6i}{\pi}G_2(\tau)$. f) Логарифмические производные функций $\tau^{12}F(\tau)$ и $F(-1/\tau)$ совпадают. g) $F(\tau)$ является (единственной с точностью до множителя) параболической модулярной формой веса 12, и $\Delta(\tau):=(2\pi)^{12}2^{-6}3^{-3}(E_2^3-E_3^2)=(2\pi)^{12}q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$. Это теорема Якоби.