Алгебра. Листок 12 (исправленный).

Формулировки задач 11 часть 2, 17 и 18 исправлены! Те, кто не сдал самостоятельную работу (задачи 17 и 18) до 11 мая, должны сдать письменно решения задач 17 и 18 в новой формулировке до 17 мая.

Стандартные обозначения этого листка: R — коммутативное кольцо с единицей, M — модуль над кольцом R.

$\diamond$ **12.1.** *Пусть I — идеал в R, M — модуль над R.*
а) Докажите, что множество $IM = \{\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i u_i, \quad \alpha_i \in I, u_i \in M, n \in \mathbb{N}\}$ является подмодулем в M.
б) Определим умножение элементов из фактор-модуля M/IM на элементы из фактор-кольца A/I следующим образом: $(a+I)\cdot(u+IM) = au + IM$. Докажите, это умножение определяет на M/IM структуру модуля над A/I.

$\diamond$ **12.2.** *а) Пусть I — максимальный идеал в R, а конечно-порожденный модуль M свободен, т.е. $M \cong R^n$. Докажите, что M/IM представляет собой n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{K} = R/I$.*
б) Предположим, что $M \cong R^n$ и $M \cong R^m$. Докажите, что $m = n$. Это число называется рангом свободного модуля M и обозначается $\operatorname{rank} M$.

$\diamond$ **12.3.** *Рассмотрим кольцо R, состоящее из всевозможных последовательностей действительных чисел: $R = \{(x_1, x_2, \ldots),\ x_i \in \mathbb{R}\}$ (операции сложения и умножения покомпонентные). Рассмотрим два свободных R-модуля: $M = R^2$ (это свободный модуль ранга 2) и $N = R$ (это свободный модуль ранга 1) Между M и N можно установить взаимно-однозначное соответствие следующим образом: паре последовательностей $((x_1, x_2, \ldots); (y_1, y_2, \ldots)) \in M$ сопоставляется последовательность $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) \in N$. (Докажите, что это взаимно-однозначное соответствие!). Противоречит ли это результату предыдущей задачи?*

$\diamond$ **12.4.** *Докажите, что ядро и образ гомоморфизма модулей являются подмодулями и докажите теорему о гомоморфизме $M/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$. ($f : M \to N$ — гомоморфизм модулей.)*

$\diamond$ **12.5.** *Рассмотрим поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ как модуль над $\mathbb{Z}$ (с обычным умножением).*
а) Докажите, что любой коненчно-порожденный подмодуль в $\mathbb{Q}$ является свободным модулем ранга 1. Приведите пример такого подмодуля, не являющегося идеалом в $\mathbb{Z}$.
б) Укажите какой-нибудь собственный $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathbb{Q}$, не являющийся конечно-порожденным.
в) Докажите, что $\mathbb{Q}$ не является свободным модулем над $\mathbb{Z}$.

$\diamond$ **12.6.** *Рассмотрим кольцо $R = \{p/q,\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (q, 2) = 1\}$. (Докажите, что это кольцо!) Является ли $\mathbb{Q}$ свободным R-модулем?*

$\diamond$ **12.7.** *а) Пусть M — конечно-порожденный модуль кручения над R (т.е. $\operatorname{Ann} u \neq \{0\}$ $\forall u \in M$, кольцо R предполагается без делителей нуля). Докажите, что $\operatorname{Ann} M \neq \{0\}$.*
б) Приведите пример модуля кручения, для которого $\operatorname{Ann} M = \{0\}$.

$\diamond$ **12.8.** *а) Приведите пример такого собственного ненулевого подмодуля $N \subset M$ в каком-нибудь модуле M, который не выделяется прямым слагаемым. (Т.е. не существует такого подмодуля $L \subset M$, что $M = N \oplus L$.)*
б) Приведите пример к предыдущему пункту, в котором оба модуля M и N свободны и конечно-порождены.

$\diamond$ **12.9.** *Пусть I и J — два идеала кольца R, причем $I + J = (1)$ и $I \cap J \subset \operatorname{Ann} M$. ($M$ — некоторый R-модуль.) Докажите, что множества $N_I = \{u \in M,\ \operatorname{Ann} u \supset I\}$ и $N_J = \{u \in M,\ \operatorname{Ann} u \supset J\}$ являются подмодулями в M. Докажите, что $M = N_I \oplus N_J$.*

$\diamond$ **12.10.** *Пусть N — подмодуль модуля M, причем фактормодуль M/N свободен. Докажите, что тогда N выделяется в M прямым слагаемым (т.е. существует такой подмодуль $L \subset M$, что $M = N \oplus L$.)*

◇ **12.11.** *1) Докажите, что конечно-порожденный модуль без кручения над кольцом главных идеалов свободен.*
2) Приведите пример модуля без кручения над кольцом главных идеалов, который не свободен.

◇ **12.12.** *1) Докажите, что конечно-порожденный модуль над кольцом главных идеалов есть прямая сумма своего подмодуля кручения и свободного модуля.*
2) Приведите пример модуля, в котором подмодуль кручения не выделяется прямым слагаемым.

◇ **12.13.** *1) Докажите, что конечно-порожденный модуль над кольцом главных идеалов R можно однозначно представить в виде прямой суммы подмодулей, аннуляторы которых имеют вид (p^n), где p — прстой элемент кольца R.*
**2) Докажите, что конечно-порожденный модуль над кольцом главных идеалов R, аннулятор которого имеет вид (p^n), где p — простой элемент кольца R, можно представить в виде прямой суммы модулей вида $R/(p_i^k)$ (такие модули называются примарными циклическими).*

◇ **12.14.** *1) Докажите, что подмодуль конечно-порожденного модуля над кольцом главных идеалов конечно-порожден. (На самом деле это утверждение верно для гораздо более широкого класса колец, в частности, для нетеровых колец.)*
2) Приведите пример конечно-порожденного модуля, имеющего подмодуль, который не является конечно-порожденным. [Рассмотрим последовательность формальных переменных $x_1, x_2, \ldots$, $\mathbb{K}$ — некоторое поле. Рассмотрим кольцо $R = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots]$, состоящее из всевозможных многочленов от этих переменных (в каждом многочлене участвует лишь конечное число пременных). Докажите, что множество всех таких многочленов с нулевым свободным членом является идеалом.]

◇ **12.15.** *Пусть M — свободный модуль над кольцом главных идеалов R, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис M, $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in M$ $(x_i \in R)$. Докажите, что подмодуль $\langle u\rangle$ выделяется прямым слагаемым в M тогда и только тогда, когда идеал $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1)$.*

◇ **12.16.** *Пусть N — подмодуль свободного конечно-порожденного модуля M над кольцом главных идеалов R. Докажите, что в M можно выбрать базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ таким образом, что существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_k$, $a_i \in R$, $k \leq n$, что $a_i | a_{i+1}$ и $\{a_1e_1, \ldots, a_ka_k\}$ представляет собой базис свободного модуля N. Такие базисы называются* **взаимными**.

◇ **12.17.** *1) Перечислите все такие подмодули N свободного $\mathbb{Z}$-модуля $M = \mathbb{Z}^2$, что $M \supset N \supset 2M$. Для каждого такого N укажите взаимные базисы.*
2) То же задание для $M \supset N \supset 3M$.

◇ **12.18.** *1) Ф — число букв в фамилии, И — число букв в имени. Найти наименьшее натуральное число λ такое, что существует подмодуль N модуля $M = \mathbb{Z}^2$, такой что $\lambda \cdot (7;5) \in N$, и $M/N \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{И}$. Указать взаимные базисы.*
2) То же задание для $M/N \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{Ф}$.