

Гиперболическая планиметрия

15.1. Докажите, что в моделях Пуанкаре (диск и верхняя полуплоскость) гиперболическая окружность является окружностью. Найдите смещение центров.

15.2. Докажите, что теорему о сохранении элемента длины достаточно доказать для любой инверсии и центра диска.

15.3. Докажите, что группа $\text{Isom}^+ H^2$ изоморфна группе $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

УКАЗАНИЕ. Используйте модель в верхней полуплоскости.

15.4. Докажите, что на гиперболической плоскости геометрическое место точек, равноудаленных от данной прямой, состоит из двух дуг окружностей.

15.5. Докажите, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке (возможно, за границей).

15.6. Докажите, что три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

УКАЗАНИЕ. Следующие три задачи советуем сделать по-шахтерски: удобно расположившись в удобной модели, пробить прямым счетом.

15.7 (теорема Пифагора). Докажите, что в прямоугольном треугольнике $\text{ch } c = \text{ch } a \text{ ch } b$.

15.8 (теоремы косинусов). Докажите, что для произвольного треугольника

$$\text{a)} \quad \text{ch } c = \text{ch } a \text{ ch } b - \text{sh } a \text{ sh } b \cos C.$$

$$\text{б)} \quad \text{ch } c = \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\sin A \sin B}.$$

15.9 (теорема синусов). Докажите, что для произвольного треугольника $\frac{\text{sh } a}{\sin A} = \frac{\text{sh } b}{\sin B} = \frac{\text{sh } c}{\sin C}$.

15.10. Докажите существование гиперболического треугольника с заданными углами A, B, C , если $A + B + C < \pi$.

15.11. Докажите существование гиперболического треугольника со сторонами a, b, c , если $a + b > c, b + c > a, a + c > b$.