Задачи по комплексному анализу 8, 17.5.2011–31.5.2011

1. Докажите, что a) $\theta_{00}^8(0,\tau)+\theta_{01}^8(0,\tau)+\theta_{10}^8(0,\tau)=\frac{30}{\pi^4}G_4(\tau)$;
b) $(\theta_{01}^4(0,\tau)+\theta_{00}^4(0,\tau))(\theta_{10}^4(0,\tau)+\theta_{00}^4(0,\tau))(\theta_{01}^4(0,\tau)-\theta_{10}^4(0,\tau))=\frac{189}{\pi^6}G_6(\tau)$.

2. Докажите, что a) действие группы $\Gamma(2)$ на плоскости Лобачевского порождается преобразованиями $\tau\mapsto\tau+2$ и $\tau\mapsto\frac{\tau}{2\tau+1}$; b) В качестве фундаментальной области действия $\Gamma(2)$ на H можно взять полосу ширины 2 над двумя полуокружностями, соединяющими -1 с 0 и 0 с 1; c) $\theta_{00}^4(0,\tau)$, $\theta_{01}^4(0,\tau)$, $\theta_{10}^4(0,\tau)$ являются модулярными формами веса 2 уровня 2 (т.е. $f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})=(c\tau+d)^2f(\tau)$ для любого дробно-линейного преобразования из $\Gamma(2)$); d) Значения ф-ции $\lambda=-\theta_{10}^4(0,\tau)/\theta_{01}^4(0,\tau)$ в каспах таковы: $\lambda(i\infty)=0$, $\lambda(0)=\infty$, $\lambda(\pm1)=1$; e) Значения ф-ции $\mu=\theta_{00}^4(0,\tau)/\theta_{01}^4(0,\tau)$ в каспах таковы: $\mu(i\infty)=1$, $\mu(0)=\infty$, $\mu(\pm1)=0$; f) $1-\lambda=\mu$, т.е. $\theta_{10}^4(0,\tau)+\theta_{01}^4(0,\tau)=\theta_{00}^4(0,\tau)$ — тэта-соотношение Римана.

3. Мы хотим доказать формулу тройного произведения Якоби: $\theta(z,\tau)=\prod_{m\geq1}(1-\exp(2m\pi i\tau))\cdot\prod_{n\geq0}[(1+\exp((2n+1)\pi i\tau-2\pi iz))(1+\exp((2n+1)\pi i\tau+2\pi iz))]$ (ср. задачу 4 листочка 2). Докажите, что a) произведение $P(z,\tau):=\prod_{n\geq0}[(1+\exp((2n+1)\pi i\tau-2\pi iz))(1+\exp((2n+1)\pi i\tau+2\pi iz))]$ сходится абсолютно и равномерно на компактах; b) $P(z+1,\tau)=P(z,\tau)$ и $P(z+\tau,\tau)=\exp(-\pi i\tau-2\pi iz)P(z,\tau)$; c) $\theta(z,\tau)=c(\tau)P(z,\tau)$, где $c(\tau)$ — нигде не обращающаяся в нуль голоморфная функция; d) $\theta_{00}(0,\tau)=c(\tau)\prod_{n\geq0}(1+\exp((2n+1)\pi i\tau))^2$, $\theta_{01}(0,\tau)=c(\tau)\prod_{n\geq0}(1-\exp((2n+1)\pi i\tau))^2$, $\theta_{10}(0,\tau)=2c(\tau)\exp(\pi i\tau/4)\prod_{n\geq1}(1+\exp(2n\pi i\tau))^2$, $\theta_{11}'(0,\tau)=-2\pi c(\tau)\exp(\pi i\tau/4)\prod_{n\geq1}(1-\exp(2n\pi i\tau))^2$ (заменами $z\mapsto z+\frac12$, $z\mapsto z+\frac{\tau}{2}$, $z\mapsto z+\frac12+\frac{\tau}{2}$ и замечанием $\theta_{11}'(0,\tau)=2\pi if(0)$, если $\theta_{11}(z,\tau)=(\exp(\pi iz)-\exp(-\pi iz))f(z)$); e) $c(\tau)^2=\frac{\prod_{n\geq1}(1-\exp(2n\pi i\tau))^2}{\prod_{n\geq1}(1+\exp(2n\pi i\tau))^2\prod_{n\geq0}(1-\exp((4n+2)\pi i\tau))^2}=\frac{\prod_{n\geq1}(1-\exp(4n\pi i\tau))^2}{\prod_{n\geq1}(1+\exp(4n\pi i\tau))^2}$ (подстановкой в формулу Якоби из задачи 3 листочка 6); f) $c(\tau)^2=\prod_{m\geq1}(1-\exp(2m\pi i\tau))^2$, и предел при $\tau\to i\infty$ обоих выражений $c(\tau)$ и $\prod_{m\geq1}(1-\exp(2m\pi i\tau))$ равен 1, т.е. $c(\tau)=\prod_{m\geq1}(1-\exp(2m\pi i\tau))$, что и доказывает формулу тройного произведения.

4. Докажите, что a) $\sum_{m\in\mathbb{Z}}\mathfrak{q}^{m^2}w^{2m}=\prod_{n\geq1}(1-\mathfrak{q}^{2n})\prod_{n\geq0}(1+\mathfrak{q}^{2n+1}w^2)(1+\mathfrak{q}^{2n+1}w^{-2})$ (подстановкой $\mathfrak{q}=\exp(\pi i\tau)$, $w=\exp(\pi iz)$); b) $\sum_{m\in\mathbb{Z}}\mathfrak{q}^{m^2}=\prod_{n\geq1}(1-\mathfrak{q}^{2n})\prod_{n\geq0}(1+\mathfrak{q}^{2n+1})^2$ (подстановкой $w=1$);
c) $\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-\mathfrak{q})^{m^2}=\prod_{n\geq1}(1-\mathfrak{q}^{2n})\prod_{n\geq0}(1-\mathfrak{q}^{2n+1})^2$ (подстановкой $w=i$).

5. Заметим, что
$\theta_{1/6,1/2}(0,3\tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\exp(3(m+\frac16)^2\pi i\tau+(m+\frac16)\pi i)=\exp(\pi i/6)\exp(\pi i\tau/12)\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m\exp((3m^2+m)\pi i\tau)$, а также $\theta_{1/6,1/2}(0,3\tau)=\exp(\pi i/6)\exp(\pi i\tau/12)\theta_{00}(\frac12+\frac{\tau}{2},3\tau)=\exp(\pi i/6)\exp(\pi i\tau/12)\prod_{n\geq1}(1-\exp(6n\pi i\tau))\cdot\prod_{n\geq0}(1-\exp(3(2n+1)\pi i\tau+\pi i\tau))(1-\exp(3(2n+1)\pi i\tau-\pi i\tau))=\exp(\pi i/6)\exp(\pi i\tau/12)\prod_{k\geq1}(1-\exp(2k\pi i\tau))$.
Докажите, что a) $\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m\mathfrak{q}^{3m^2+m}=\prod_{n\geq1}(1-\mathfrak{q}^{2n})$ (тождество Эйлера);
b) $\theta_{1/6,1/2}(0,3\tau)^{24}=\exp(2\pi i\tau)\prod_{n\geq1}(1-\exp(2n\pi i\tau)^{24}=q\prod_{n\geq1}(1-q^n)^{24}$ (ср. задачу 3 листочка 7);
c) $\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m(2m+1)\mathfrak{q}^{m^2+m}=2\prod_{n\geq1}(1-\mathfrak{q}^{2n})^3$
(сравнением равенств $\theta_{11}'(0,\tau)=-2\pi\exp(\pi i\tau/4)\prod_{n\geq1}(1-\exp(2n\pi i\tau))^3$ и
$\theta_{11}'(0,\tau)=-\pi\exp(\pi i\tau/4)\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m(2m+1)\exp((m^2+m)\pi i\tau)$); d) $\theta_{1/6,1/2}(0,3\tau)^3=\frac{1}{2\pi i}\theta_{1/2,1/2}'(0,\tau)$.

40 лет назад Макдональд заметил, что $\prod_{n\geq1}(1-\mathfrak{q}^{2n})^d$ раскладывается в ряд по $\mathfrak{q}$ с легко вычислимыми коэффициентами тогда и только тогда, когда d является размерностью простой алгебры Ли: 1,3,8,10,14,15,21...