Задачи по группам и алгебрам Ли – 7

Каждая задача (со всеми пунктами) оценивается в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. а) Какие из комплексных 3-мерных алгебр Ли (см. классификацию) разрешимы, и какие нильпотентны? **б)** Постройте соответствующие односвязные группы Ли.

2. а) Докажите, что всякая 4-мерная нильпотентная алгебра Ли обладает 3-мерным абелевым идеалом. **б)** Опишите с точностью до изоморфизма все комплексные нильпотентные алгебры Ли размерности не более 4.

3. а) Докажите, что класс разрешимых групп (алгебр) Ли замкнут относительно взятия подгрупп Ли (подалгебр Ли), факторов и расширений. **б)** Верно ли это для нильпотентных групп (алгебр) Ли?

4. Алгебра Ли L содержит собственную n-мерную разрешимую подалгебру Ли M. Докажите, что в L имеется $n+1$-мерная подалгебра Ли. (*Указание:* Рассмотрите представление алгебры Ли M в пространстве L/M).

5. а) Докажите, что всякая ненильпотентная комплексная алгебра Ли содержит 2-мерную неабелеву подалгебру. **б)** Верно ли это над полем вещественных чисел?

6*. а) Найдите все максимальные (по включению) разрешимые подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. **б)** Найдите все подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, содержащие подалгебру нестрого верхнетреугольных матриц.

7*. Пусть $A, B \in Mat_n(\mathbb{C})$ – такие матрицы, что коммутатор $AB-BA$ имеет ранг 1. Докажите, что подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, порожденная A и B, разрешима.

8*. Конечномерная алгебра Ли L допускает невырожденное (как линейный оператор) дифференцирование. Докажите, что эта алгебра Ли нильпотентна.

9*. Приведите какой-нибудь контрпример к теореме Ли над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики.

10*. а) Докажите, что для любой нильпотентной алгебры Ли L выполнено одно из следующих условий:

(1) $\dim L = 1$;

(2) размерность центра $\dim ZL \geq 2$;

(3) в алгебре Ли L имеется подалгебра Гейзенберга $\mathbb{C}\{x, y, z\}$ ($[x, y] = z$) такая, что $x \notin [L, L]$, $[y, L] = \mathbb{C}z$, $z \in ZL$.

б) Докажите, что в случае (3) существует такой идеал $I \subset L$, что подалгебра инвариантов в симметрической алгебре $S(L)^L \subset S(L)$ лежит в $S(I)$, а центр универсальной обертывающей алебры $ZU(L)$ лежит в $U(I)$. **в)** *(Теорема Диксмье)* Докажите, что отображение симметризации $\sigma : S(L) \to U(L)$ при ограничении на подалгебру инвариантов дает изоморфизм алгебр $S(L)^L \tilde{\to} ZU(L)$, где $ZU(L)$ – центр универсальной обертывающей алгебры. (*Указание:* воспользуйтесь индукцией по размерности алгебры Ли с помощью предыдущих пунктов). **г)** Покажите, что для ненильпотентных алгебр Ли последнее, вообще говоря, неверно.