Задачи по комплексному анализу 6, 19.4.2011–10.5.2011

1. Докажите, что a) $\theta(x, it)$ (для вещественных x, t) удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t}\theta(x, it) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(x, it)$; b) $\lim_{t\to 0}\theta(x, it) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n$ (сумма δ-функций в целых точках). Короче, $\theta(x, it)$ является фундаментальным решением уравнения теплопроводности на окружности $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

2. a) Сколько нулей у функции $f(lz, \tau)$, где $0 \neq f(z, \tau) \in V_l$, на эллиптической кривой $E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$? b) Где именно находятся нули функции $\theta_{a,b}(lz, \tau)$, $a, b \in \frac{1}{l}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$? c) Упорядочим как-нибудь все эти $\theta_{a,b}$: $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{l^2-1}$, и рассмотрим вектор $(\theta_0(lz, \tau), \ldots, \theta_{l^2-1}(lz, \tau))$. Докажите, что он никогда не обращается в нуль, и тем самым корректно определено отображение $\varphi_l :\ E_\tau \to \mathbb{P}^{l^2-1},\ z \mapsto [\theta_0(lz, \tau) : \ldots : \theta_{l^2-1}(lz, \tau)]$. d) Докажите, что φ_l — вложение. e) Пусть группа $\frac{1}{l}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{l}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ действует на E_τ сдвигами: $(a, b)(z) := z + \frac{a\tau+b}{l}$. Докажите, что можно отождествить $\mathbb{P}^{l^2-1}$ с $\mathbb{P}(V_l)$ так, что действие конечной группы Гейзенберга H_l на V_l задает действие ее фактора по центру $\frac{1}{l}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{l}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ на $\mathbb{P}^{l^2-1}$, относительно которого вложение φ_l эквивариантно: $(a, b)\varphi_l(z) = \varphi_l((a, b)(z))$. f) Докажите, что образ $\varphi_2(E_\tau) \subset \mathbb{P}^3$ высекается уравнениями $\theta_{00}^2(z)\theta_{00}(0)^2 = \theta_{01}(z)^2\theta_{01}(0)^2 + \theta_{10}(z)^2\theta_{10}(0)^2$, $\theta_{11}^2(z)\theta_{00}(0)^2 = \theta_{01}(z)^2\theta_{10}(0)^2 - \theta_{10}(z)^2\theta_{01}(0)^2$.

3. Выведите из задачи 3 листочка 5, что a) функция $f(\tau) := \left(\frac{\partial\theta_{11}(z,\tau)}{\partial z}|_{z=0}\right)^8$ является модулярной формой веса 12, т.е. $f(\tau) = (cz + d)^{-12} f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$; b) функция $g(\tau) := (\theta_{00}(0, \tau)\theta_{01}(0, \tau)\theta_{10}(0, \tau))^8$ тоже является модулярной формой веса 12. c) Докажите, что $\frac{\partial\theta_{11}(z,\tau)}{\partial z}|_{z=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\pi(2n + 1)(-1)^{n+1}\exp(\pi i\tau(n + \frac{1}{2})^2)$ стремится к нулю при $\tau = it \to i\infty$. d) Докажите, что $g(it) \to 0$ при $it \to i\infty$. e) Мы скоро докажем, что с точностью до пропорциональности есть единственная модулярная форма Δ веса 12, зануляющаяся в бесконечности. Таким образом, $\frac{\partial\theta_{11}(z,\tau)}{\partial z}|_{z=0} = c\theta_{00}(0, \tau)\theta_{01}(0, \tau)\theta_{10}(0, \tau)$ для некоторой константы c. Вычислите первые три члена в разложении по $q = e^{\pi i\tau}$ обеих частей и докажите, что $c = -\pi$ (формула Якоби).

4. Докажите тождество $\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2} = \prod_{n\in\mathbb{N}}(1 - q^{2n})\prod_{n\geq 0}(1 + q^{2n+1})^2$.