24.1. Пусть X — векторное пространство, $f, f_1, \ldots, f_n$ — линейные функционалы на X. Докажите, что $\operatorname{Ker} f \supseteq \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} f_i \iff f \in \operatorname{span}\{f_1, \ldots, f_n\}$. (Это утверждение было использовано на лекции для описания пространства слабо непрерывных линейных функционалов.)

24.2. 1) Приведите пример линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП X и Y, непрерывного относительно слабых топологий на X и Y, но не непрерывного.
2) Приведите пример линейного оператора между хаусдорфовыми ЛВП, переводящего ограниченные множества в ограниченные, но не непрерывного.

24.3. Докажите, что пространство c_0 секвенциально плотно в своем втором сопряженном относительно слабой* топологии.

24.4. Приведите пример банахова пространства X и векторного подпространства $Y \subset X^*$, которое замкнуто по норме, но не замкнуто в слабой* топологии.

24.5. Пусть X, Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. Докажите, что $\operatorname{Im} T^*$ замкнут в X^* по норме тогда и только тогда, когда он замкнут в слабой* топологии.

24.6 (*теорема Голдстайна*)**.** Докажите, что замкнутый единичный шар нормированного пространства слабо* плотен в замкнутом единичном шаре его второго сопряженного.

Указание: воспользуйтесь теоремой о биполяре.

24.7. Пусть X — нормированное пространство. Докажите, что каноническое вложение $i_X \colon X \to X^{**}$ является топологически инъективным оператором из (X, wk) в $(X^{**}, \mathrm{wk}^{**})$ с плотным образом.

24.8*. Докажите, что в пространстве ℓ^1 всякая слабо сходящаяся последовательность сходится по норме.

Определение 24.1. Пусть X — ЛВП и P — направленное определяющее семейство полунорм на X. Банаховы пространства $\{X_p : p \in P\}$, построенные в задаче 23.16, называются *ассоциированными* с X.

24.9. Опишите банаховы пространства, ассоциированные со следующими ЛВП: **1)** $\mathbb{K}^X$ (X — множество); **2)** $C(X)$ (X — топологическое пространство); **3)** $C^\infty[a,b]$; **4)** $C^\infty(\mathbb{R})$; **5)** $\mathscr{O}(U)$ (U — область в $\mathbb{C}$).

24.10. Для каждой ограниченной области $U \subset \mathbb{C}$ обозначим через $\mathscr{A}(\overline{U})$ подпространство в $C(\overline{U})$, состоящее их тех функций, которые голоморфны в U.
1) Положим $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Докажите, что при $r < R$ *оператор ограничения* $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_R) \to \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_r)$, сопоставляющий каждой функции из $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_R)$ ее ограничение на $\overline{\mathbb{D}}_r$, разлагается в композицию $\mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_R) \xrightarrow{\varphi} \ell^1 \xrightarrow{M_\lambda} \ell^1 \xrightarrow{\psi} \mathscr{A}(\overline{\mathbb{D}}_r)$, где φ, ψ — непрерывные операторы, а M_λ — компактный диагональный оператор. Выведите отсюда, что оператор ограничения компактен.
2) Пусть U, V — ограниченные области в $\mathbb{C}$, причем $\overline{V} \subset U$. Интерпретируйте оператор ограничения $\mathscr{A}(\overline{U}) \to \mathscr{A}(\overline{V})$ как некоторый интегральный оператор, и выведите отсюда, что он компактен.
3) (*теорема Монтеля*). Пусть U — область в $\mathbb{C}$. Докажите, что всякое ограниченное подмножество в пространстве $\mathscr{O}(U)$ относительно компактно.

24.11. Докажите, что всякое ограниченное подмножество в пространствах **1)** $C^\infty[a,b]$ и **2)** $C^\infty(\mathbb{R})$ относительно компактно.

Указание: используйте тот же прием, основанный на использовании ассоциированных банаховых пространств, что и в предыдущей задаче.

Замечание 24.1 (*для сделавших две предыдущие задачи*)**.** Техника, использованная в задачах 24.10 и 24.11, в свое время привела к понятию *пространства Шварца*, а затем к несколько более узкому, но более полезному понятию *ядерного пространства.* У таких пространств есть много хороших свойств, непохожих на свойства нормированных пространств; например, всякое ограниченное множество в пространстве Шварца относительно компактно. К ядерным пространствам относятся, в частности, пространства гладких и голоморфных функций и многие другие. Они имеют важные приложения в теории обобщенных функций, дифференциальных операторов и в комплексно-аналитической геометрии. О пространствах Шварца и ядерных пространствах хорошо написано в книгах R. Meise, D. Vogt “Introduction to Functional Analysis” и F. Treves “Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels”. О приложениях в комплексно-аналитической геометрии см. последнюю главу книги J.-P. Demailly “Complex Analytic and Differential Geometry”, а также книги J. Eschmeier, M. Putinar “Spectral Decompositions and Analytic Sheaves” и C. Bănică, O. Stănăşilă “Algebraic methods in the global theory of complex spaces”.