Функциональный анализ

Вопросы к коллоквиуму за 3 и 4 модули

1. Спектр элемента алгебры. Спектры элементов алгебр $\mathbb{C}^X$, $\ell^\infty(X)$, $L^\infty(X,\mu)$. Поведение спектра при гомоморфизмах. Спектрально инвариантные подалгебры; примеры.

2. Теоремы об отображении спектра для полиномиального и рационального исчислений.

3. Банаховы алгебры; примеры. Свойства группы обратимых элементов банаховой алгебры.

4. Компактность спектра элемента банаховой алгебры. Резольвентная функция и ее свойства. Непустота спектра элемента банаховой алгебры. Теорема Гельфанда–Мазура.

5. Спектральный радиус. Формула Бёрлинга.

6. Спектры диагонального оператора и оператора умножения. Части спектра линейного оператора (точечный, непрерывный и остаточный спектры). Пример: части спектра диагонального оператора.

7. Спектр сопряженного оператора. Части спектра сопряженного оператора. Части спектра для операторов левого и правого сдвига в ℓ^p (рефлексивный случай).

8. Вполне ограниченные метрические пространства. Полная ограниченность подмножеств, замыканий, сумм вполне ограниченных множеств. Полная ограниченность ограниченных подмножеств в конечномерном пространстве. Лемма Рисса об ε-перпендикуляре. Сфера в бесконечномерном нормированном пространстве не вполне ограничена.

9. Критерий полной ограниченности метрического пространства в терминах последовательностей. Эквивалентность полной ограниченности и предкомпактности. Следствия: критерий компактности метрического пространства; некомпактность сферы в бесконечномерном нормированном пространстве.

10. Теорема Арцела–Асколи.

11. Компактные операторы. Простейшие примеры компактных и некомпактных операторов. Свойства множества $\mathscr{K}(X,Y)$ компактных операторов. Критерий компактности диагонального оператора. Компактность сопряженного оператора. Аппроксимируемость компактных операторов в гильбертовом пространстве конечномерными.

12. Фредгольмовы операторы. Простейшие примеры. Замкнутость образа фредгольмова оператора. Фредгольмов индекс. Аддитивность индекса.

13. Подъем и спуск линейного оператора; их свойства. Теорема Рисса–Шаудера об операторах "$\mathbf{1}+$компактный"; абстрактная теорема Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.

14. Проекторы в нормированных пространствах. Топологические прямые суммы подпространств. Дополняемые подпространства.

15. Свойства спектра компактного оператора.

16. Эквивалентность замкнутости образа оператора и его сопряженного. Пространства, сопряженные к ядру и коядру оператора с замкнутым образом. Следствие: фредгольмовость и индекс сопряженного оператора.

17. Критерий фредгольмовости Никольского–Аткинсона. Алгебра Калкина. Существенный спектр, его компактность и непустота.

18. Открытость множества фредгольмовых операторов и локальная постоянность индекса. Сохранение фредгольмовости и индекса при компактных возмущениях. Теорема Никольского о фредгольмовых операторах индекса 0.

19. Гильбертово сопряженный оператор. Свойства операции гильбертова сопряжения. C^*-тождество.

20. Связь между операторами в гильбертовом пространстве и полуторалинейными формами.

21. Ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве и их алгебраическое описание. Алгебраическое описание изометрий и коизометрий в гильбертовом пространстве. Унитарные, самосопряженные и нормальные операторы. Критерий самосопряженности в терминах квадратичных форм.

22. Спектр унитарного оператора. Спектр самосопряженного оператора. Спектральный радиус самосопряженного оператора. Связь между инвариантностью подпространства и его ортогонального дополнения.

23. Теорема Гильберта–Шмидта о компактных самосопряженных операторах.

24. Теорема Шмидта о строении компактных операторов между гильбертовыми пространствами. s-числа компактного оператора.

25. Задача Штурма–Лиувилля. Оператор Штурма–Лиувилля. Положительность его собственных значений. Интегральный оператор, обратный к оператору Штурма–Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма–Лиувилля.

26. Связь собственных векторов оператора Штурма–Лиувилля и обратного к нему интегрального оператора. Инъективность последнего. Теорема о собственном базисе и собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля.

27. Полинормированные пространства. Топология, порожденная семейством полунорм. Критерий ее хаусдорфовости. Примеры.

28. Критерий непрерывности полунормы на полинормированным пространстве. Критерий непрерывности линейного оператора в терминах полунорм. Критерий мажорирования одного семейства полунорм другим.

29. Выпуклые, закругленные и абсолютно выпуклые оболочки множеств в векторном пространстве. Локально выпуклые пространства. Связь локально выпуклых и полинормированных пространств.

30. Наличие достаточного количества непрерывных линейных функционалов на хаусдорфовом локально выпуклом пространстве. Ограниченные подмножества локально выпуклого пространства. Критерий нормируемости.

31. Критерий метризуемости локально выпуклого пространства.

32. Полные топологические векторные пространства. Пространства Фреше: примеры и основные свойства (без доказательств).

33. Дуальные пары и слабые топологии. Линейные функционалы, непрерывные в слабой топологии. Критерий рефлексивности банахова пространства в терминах топологий на его сопряженном.

34. Сопряженные операторы для дуальных пар. Критерий существования сопряженного оператора. Ограниченность слабо ограниченных множеств в хаусдорфовом локально выпуклом пространстве. Эквивалентность непрерывности и слабой непрерывности оператора из метризуемого локально выпуклого пространства в произвольное.

35. Поляры. Теорема о биполяре и ее следствия.