22.1. Пусть (X, P) — полинормированное пространство.
1) Докажите, что топология $\tau(P)$, порожденная семейством полунорм P, действительно является топологией.
2) Докажите, что для каждого $x \in X$ все множества вида

$$U_{p_1,\ldots,p_n,\varepsilon}(x) = \{y \in X : p_i(y-x) < \varepsilon \ \forall i = 1,\ldots,n\}$$

(где $p_1,\ldots,p_n \in P$ и $\varepsilon > 0$) открыты и образуют базу в x.
3) Докажите, что $\tau(P)$ — слабейшая топология на X, в которой открыты все множества вида $U_{p,\varepsilon}(x)$ $(p \in P,\ x \in X,\ \varepsilon > 0)$.

22.2. Докажите непрерывность операций сложения и умножения на число в полинормированном пространстве.

22.3. Докажите, что направленность (x_λ) в полинормированном пространстве (X, P) сходится к $x \in X$ тогда и только тогда, когда $p(x - x_\lambda) \to 0$ для всех $p \in P$.

22.4. Докажите, что топология на векторном пространстве X, порожденная семейством полунорм P, хаусдорфова тогда и только тогда, когда для каждого $0 \neq x \in X$ найдется такая полунорма $p \in P$, что $p(x) > 0$.

22.5. Для полунормы p на векторном пространстве X положим $U_p = \{x \in X : p(x) < 1\}$. Докажите, что **1)** $U_p \cap U_q = U_{\max\{p,q\}}$; **2)** $U_p \subseteq U_q \iff q \leqslant p$; **3)** $U_p \prec U_q \iff q \prec p$.

22.6. Докажите, что семейство полунорм P на векторном пространстве X является направленным (относительно порядка $\prec$) тогда и только тогда, когда для каждого $x \in X$ (или, эквивалентно, для $x = 0$) множества вида $U_{p,\varepsilon}(x)$ (где $p \in P,\ \varepsilon > 0$) образуют базу в x.

22.7. Пусть X, Y — топологические векторные пространства. Докажите, что
1) линейный оператор $T\colon X \to Y$ непрерывен $\iff$ он непрерывен в нуле;
2) множество $\mathscr{L}(X, Y)$ непрерывных линейных операторов из X в Y — векторное подпространство в $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, Y)$.

22.8. Докажите, что хаусдорфово полинормированное пространство (X, P) (где P — направленное семейство полунорм на X) нормируемо тогда и только тогда, когда $P \sim \{p_0\}$ для некоторого $p_0 \in P$.

22.9. На каких из следующих полинормированных пространств существует хотя бы одна непрерывная норма?
1) $\mathbb{C}^S$ (где S — множество);
2) $C(X)$ (где X — тихоновское[1] топологическое пространство);
3) пространство голоморфных функций $\mathscr{O}(U)$ на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, снабженное компактно-открытой топологией;
4) $C^\infty[a, b]$;
5) $C^\infty(\mathbb{R})$;
6) $\mathscr{B}(X, Y)$ с сильной операторной топологией (где X и Y — нормированные пространства);
7) $\mathscr{B}(X, Y)$ со слабой операторной топологией (где X и Y — нормированные пространства).

22.10. Какие пространства из предыдущей задачи нормируемы?

[1] Хаусдорфово топологическое пространство X называется *тихоновским*, если для каждого замкнутого множества $F \subset X$ и каждого $x \in X \setminus F$ найдется такая непрерывная функция $f\colon X \to [0, 1]$, что $f|_F = 0$ и $f(x) = 1$. Тихоновскими являются все метризуемые пространства (докажите!), все хаусдорфовы компакты и, более общим образом, все *нормальные* пространства (см. любой учебник по общей топологии).

22.11. 1) Докажите, что на конечномерном векторном пространстве любые два семейства полунорм, каждое из которых задает хаусдорфову топологию, эквивалентны.
2*) Докажите, что на конечномерном векторном пространстве есть только одна топология, превращающая его в топологическое векторное пространство.

22.12. Пусть S — множество.
1) Докажите, что для любой функции $f \in \mathbb{C}^S$ оператор умножения $M_f \colon \mathbb{C}^S \to \mathbb{C}^S$, $M_f(g) = fg$, непрерывен.
2) Опишите все непрерывные линейные функционалы на пространстве $\mathbb{C}^S$.

22.13. 1) Докажите, что любой линейный дифференциальный оператор

$$L \colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad (Lf)(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x) f^{(k)}(x)$$

(где $a_0, \ldots, a_n \in C^\infty(\mathbb{R})$), непрерывен.
2) Докажите аналогичное утверждение для пространства $\mathscr{O}(U)$ (см. п.3 задачи 22.9).

22.14. Пусть $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ — пространство голоморфных функций в круге $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Для $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ положим $c_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$. Докажите, что следующие семейства полунорм на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ эквивалентны:

(1) $\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)| \quad (K \subset U$ — компакт);

(2) $\|f\|_r = \sum_{n=0}^\infty |c_n(f)| r^n \quad (0 < r < R)$;

(3) $\|f\|_r = \Big(\sum_{n=0}^\infty (|c_n(f)| r^n)^p\Big)^{1/p} \quad (0 < r < R,\ p \in [1, +\infty)$ фиксировано);

(4) $\|f\|_{r,\infty} = \sup_{n \geqslant 0} |c_n(f)| r^n \quad (0 < r < R)$;

(5) $\|f\|_r^I = \int_{|z|=r} |f(z)|\, d\mu(z) \quad (0 < r < R)$;

(6) $\|f\|_{r,p}^I = \Big(\int_{|z|=r} |f(z)|^p\, d\mu(z)\Big)^{1/p} \quad (0 < r < R,\ p \in [1, +\infty)$ фиксировано).

В пп. (5) и (6) μ — мера Лебега на окружности $|z| = r$.

22.15. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Докажите, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(U)$ совпадает с топологией, унаследованной из $C^\infty(U)$.