23.1. Пусть e_n — числовая последовательность с единицей на n-м месте и нулем на остальных. Исследуйте последовательность (e_n) на слабую сходимость в пространствах c_0 и ℓ^p $(1 \leqslant p < \infty)$.

23.2. Докажите, что последовательность непрерывных функций на отрезке слабо сходится тогда и только тогда, когда она равномерно ограничена и сходится поточечно.

23.3. Пусть T_ℓ и T_r — операторы левого и правого сдвига в ℓ^2. Исследуйте последовательности (T_ℓ^n) и (T_r^n) на сходимость
1) по норме в $\mathscr{B}(\ell^2)$;
2) в сильной операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$;
3) в слабой операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$.

23.4. Докажите, что локально выпуклое пространство нормируемо тогда и только тогда, когда в нем есть ограниченная окрестность нуля.

23.5. Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство, топология которого порождена последовательностью полунорм $\{\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N}\}$. Докажите, что формула

$$|x| = \sum_n \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1 + \|x\|_n}$$

задает псевдонорму на X, и что топология, порожденная этой псевдонормой, совпадает с исходной топологией на X.

23.6. Пусть (X, μ) — пространство с мерой. Для каждого $p \in (0,1)$ определим векторное пространство $L^p(X,\mu)$ так же, как и при $p \geqslant 1$. Для $f \in L^p(X,\mu)$ положим

$$|f|_p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x).$$

1) Докажите, что $|\cdot|_p$ — псевдонорма на $L^p(X,\mu)$.
2) Докажите, что $L^p(X,\mu)$ локально выпукло лишь в том случае, когда оно конечномерно.
3) Докажите, что $L^p[0,1]^* = \{0\}$.

23.7. Пусть (X, μ) — пространство с конечной мерой. Обозначим через $L^0(X,\mu)$ пространство классов эквивалентности μ-измеримых функций на X (как обычно, функции эквивалентны, если они равны почти всюду). Для $f \in L^0(X,\mu)$ положим

$$|f|_0 = \int_X \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|} \, d\mu(x).$$

1) Докажите, что $|\cdot|_0$ — псевдонорма на $L^0(X,\mu)$.
2) Докажите, что сходимость по псевдонорме $|\cdot|_0$ — это то же самое, что сходимость по мере.
3) Докажите, что $L^0(X,\mu)$ локально выпукло лишь в том случае, когда оно конечномерно.
4) Докажите, что $L^0[0,1]^* = \{0\}$.

23.8 (*Пространства Фреше*)**.** Пусть X — метризуемое локально выпуклое пространство. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

1) X полно как топологическое векторное пространство;
2) X секвенциально полно как топологическое векторное пространство;
3) для любой (или, что эквивалентно, для некоторой) метрики ρ, порождающей топологию на X и инвариантной относительно сдвигов, (X, ρ) — полное метрическое пространство.

23.9. Докажите, что следующие локально выпуклые пространства являются пространствами Фреше:
1) пространство всех последовательностей $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$;
2) $C(X)$ (где X — локально компактное σ-компактное топологическое пространство — например, открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ или любое многообразие);
3) $C^\infty(\mathbb{R})$;
4) пространство голоморфных функций $\mathscr{O}(U)$ на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$.

23.10. 1) Пусть X — локально выпуклое пространство. Докажите, что слабая топология на X не сильнее исходной.
2) Пусть X — нормированное пространство. Докажите, что слабая* топология на X^* не сильнее, чем топология, задаваемая стандартной нормой.

23.11. Пусть $\langle X, Y \rangle$ — дуальная пара векторных пространств. Докажите, что
1) $\dim X < \infty \iff \dim Y < \infty \iff$ слабая топология $\sigma(X, Y)$ нормируема;
2) слабая топология $\sigma(X, Y)$ метризуема $\iff$ размерность Y не более чем счетна;
3) слабая топология на бесконечномерном нормированном пространстве и слабая* топология на пространстве, сопряженном к бесконечномерному банахову пространству, неметризуемы.

23.12. Докажите, что слабая топология на пространстве $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ совпадает с исходной.

23.13. Пусть X и Y — нормированные пространства. Обозначим через SOT, WOT и NT соответственно сильную операторную топологию, слабую операторную топологию и топологию, задаваемую операторной нормой на $\mathscr{B}(X, Y)$.
1) Докажите, что WOT $\subseteq$ SOT $\subseteq$ NT.
2) Докажите, что если Y бесконечномерно, то WOT $\neq$ SOT.
3) Докажите, что если X бесконечномерно, то SOT $\neq$ NT.

23.14. Пусть X, Y — нормированные пространства. Докажите, что подмножество $M \subset \mathscr{B}(X, Y)$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено по операторной норме.

23.15. Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство локально выпуклых пространств и $X = \prod_{i \in I} X_i$. Для каждого $i \in I$ обозначим через $\pi_i \colon X \to X_i$ стандартную проекцию. Выберем определяющее семейство полунорм P_i на X_i для каждого i, и рассмотрим семейство полунорм $\{p_i \circ \pi_i : p_i \in P_i,\ i \in I\}$ на X. Докажите, что порожденная им топология совпадает с тихоновской.

23.16 (*пополнение*)**.** Пусть X — хаусдорфово локально выпуклое пространство, топология которого порождена семейством полунорм P. Для каждого $p \in P$ положим $X_p^0 = X/p^{-1}(0)$ и будем рассматривать X_p^0 как нормированное пространство относительно факторнормы полунормы p. Обозначим через X_p пополнение X_p^0. Докажите, что отображение

$$X \to \prod_{p \in P} X_p, \quad x \mapsto (x + p^{-1}(0))_{p \in P}$$

топологически инъективно. Выведите отсюда существование пополнения пространства X.