Алгебра. Листок 13.

◇ **13.1.** *Пусть* M — R*-модуль,* I — *идеал в* R. *Докажите, что* $M \otimes_R R/I \cong M/IM$.

◇ **13.2.** *Вычислите* $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m$.

◇ **13.3.** *Пусть* I — *идеал в* R. *а) Докажите, что* $R/I \otimes_R R/I \cong R/I$.
б) Докажите, что $I \otimes_R R/I \cong I/I^2$. *(Напомним, что* I^2 — *это идеал в в* R*, порожденный всеми произведениями вида* ab*, где* $a \in I$ *и* $b \in I$*.)*

◇ **13.4.** *Пусть* $f : R \to S$ — *гомоморфизм колец. Определим умножение элементов кольца* S *на элементы кольца* R *по формуле* $a \cdot s = f(a)s$ *(*$a \in R$, $s \in S$*, в правой части равенства умножение выполняется в кольце* S*).*
а) Докажите, что относительно этого умножения S *является модулем над* R.
б) Пусть M — *модуль над* R. *Докажите, что* R*-модуль* $S \otimes_R M$ *является модулем над* S *относительно умножения* $s \cdot (u \otimes v) = (su) \otimes v$ *(*$s \in R$, $u \in S$, $v \in M$*, в правой части равенства умножение выполняется в кольце* S*).*
в) Докажите, что если M *свободен над* R*, то* $S \otimes_R M$ — *свободный модуль того же ранга над* S.

◇ **13.5.** *а) Пусть* $f : M \to P$, $h : N \to Q$, — *гомоморфизмы* R*-модулей. Докажите, что отображение* $f \otimes h : M \otimes_R N \to P \otimes_R Q$*, заданное формулой* $f \otimes h(u \otimes v) = f(u) \otimes h(v)$*, является гомоморфизмом* R*-модулей.*
б) Пусть $R = \mathbb{K}$ *поле, а все модули из предыдущего пункта — конечномерные линейные пространства над* $\mathbb{K}$. *Псть линейные отображения* f *и* h *в некоторых базисах задаются матрицами* $\hat{f} = A = (a_{ij})$ *и* $\hat{h} = B = (b_{kl})$. *Докажите, что в подходящем базисе (каком?) отображение* $f \otimes h$ *задается блочной матрицей, полученной из матрицы* A *заменой каждого элемента* a_{ij} *на матрицу* $a_{ij}B$. *(А можно ли, наоборот, устраивать блочную матрицу из* B*, заменяя каждое* b_{kl} *на матрицу* $b_{kl}A$*?)*

◇ **13.6.** *Пусть в условиях предыдущей задачи* $N = Q$*, а отображение* h *тождественно:* $h = \mathrm{Id}_N$.
а) Докажите, что если отображение f *сюръективно, то отображение* $f \otimes \mathrm{Id}_N$ *также сюръективно.*
б) Покажите, что если отображение f *инъективно, то отображение* $f \otimes \mathrm{Id}_N$ *может не быть инъективным. [Достаточно в качестве* f *взять отображение умножения на 2 в целых числах, и* $N = \mathbb{Z}_2$*.]*
в) Докажите, что если кольцо $R = \mathbb{K}$ *поле, то из инъективности* f *следует инъективность* $f \otimes \mathrm{Id}_N$.

◇ **13.7.** *Цель этой задачи — привести пример, когда тензорное произведение двух модулей без кручения над кольцом без делителей нуля содержит кручение. В качестве* R *мы возьмем кольцо многочленов от двух переменных над полем* $R = \mathbb{K}[x, y]$*, и рассмотрим* $J \otimes_R J$*, где* $J = (x, y)$ — *идеал, состоящий из всех многочленов, обращающихся в* 0 *в точке* $(0; 0)$*, т.е.* $J = (x, y)$.
а) Докажите, что J/J^2 — *двумерное векторное пространство над* $\mathbb{K}$*, базисом которого являются смежные классы* $x + J^2$ *и* $y + J^2$.
б) Докажите, что отображение $J \otimes_R J \to J/J^2 \otimes_{\mathbb{K}} J/J^2$ *сюръективо, и, следовательно, тензоры* $x \otimes y$ *и* $y \otimes x$ *различны в* $J \otimes_R J$.
в) Докажите, что тензор $x \otimes y - y \otimes x \in J \otimes_R J$ *аннулируется умножением на* $x \in R$ *и* $y \in R$.

◇ **13.8.** *Рассмотрим* n*-кратное тензорное произведение* R*-модуля* M *на себя* $M^{\otimes n} = M \otimes_R M \otimes_R \ldots \otimes_R M$ *и зафиксируем перестановку* $\sigma \in S_n$. *Докажите, что отображение*
$\varphi_\sigma : u_1 \otimes u_2 \otimes \ldots \otimes u_n \mapsto u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes u_{\sigma(n)}$ *является изоморфизмом* R*-модуля* $M^{\otimes n}$ *на себя.*
а) Докажите, что множество $\mathrm{Symm}^n M$ *таких тензоров* $t \in M^{\otimes n}$*, что* $\forall\ \sigma \in S_n\ t = \varphi_\sigma(t)$ *является подмодулем в* $M^{\otimes n}$. *Такие тензоры называются симметрическими.*
б) Докажите, что множество $\mathrm{Alt}^n M$ *таких тензоров* $t \in M^{\otimes n}$*, что* $\forall\ \sigma \in S_n\ t = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\varphi_\sigma(t)$ *(*$\varepsilon(\sigma)$ — *это четность перестановки* σ*) является подмодулем в* $M^{\otimes n}$. *Такие тензоры называются кососимметрическими.*
в) Пусть $R = \mathbb{K}$ — *поле,* $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$. *Докажите, что отображения* $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} \varphi_\sigma$ *и* $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\varphi_\sigma$ *являются проекторами в* $M^{\otimes n}$ *на, соответственно, подпространства* $\mathrm{Symm}^n M$ *и* $\mathrm{Alt}^n M$.

◇ **13.9.** *Пусть* U — *конечномерное линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$.
а) Докажите, что при $n > 1$ $\mathrm{Symm}^n U \cap \mathrm{Alt}^n U = \{0\}$. *б) Докажите, что* $U^{\otimes 2} = \mathrm{Symm}^2 U \oplus \mathrm{Alt}^2 U$.
в) Покажите, что $U^{\otimes 3} \neq \mathrm{Symm}^3 U \oplus \mathrm{Alt}^3 U$. *Укажите явно тензор* $t \in U^{\otimes 3}$, $t \notin \mathrm{Symm}^3 U \oplus \mathrm{Alt}^3 U$.
г) Вычислите $\dim \mathrm{Symm}^k U$ *(укажите базис!).* *д) Вычислите* $\dim \mathrm{Alt}^k U$ *(укажите базис!).*

◇ **13.10.** *Пусть U и V — конечномерные линейные пространства над полем $\mathbb{K}$, U^* — двойственное линейное пространство.*
а) Докажите, что отображение $U^* \otimes_{\mathbb{K}} V \to \mathrm{Hom}(U, V)$, сопоставляющее тензору $t = \sum \alpha_i \varphi_i \otimes v_i$ линейное отображение $f_t : u \mapsto \sum \alpha_i \varphi_i(u) v_i$, $f_t \in \mathrm{Hom}(U, V)$, является изоморфизмом линейных пространств.
б) Пусть $V = U$. Докажите, что отображение $\xi : U^* \otimes_{\mathbb{K}} U \to \mathbb{K}$, заданное формулой $\xi(\sum \alpha_i \varphi_i \otimes u_i) = \sum \alpha_i \varphi_i(u_i)$, является линейной функцией на $U^* \otimes_{\mathbb{K}} U$. Докажите, что $\xi(t)$ — это след оператора, сопоставляемого тензору t в предыдущем пункте.

◇ **13.11.** *Пусть U — n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотри $T(U) = \bigoplus_{n=0}^{n=\infty} U^{\otimes n}$ (мы полагаем по определению $U^{\otimes 0} = \mathbb{K}$). Докажите, что $T(U)$ является относительно операции тензорного произведения ассоциативной алгеброй с 1 (не коммутативной!). Она называется тензорной алгеброй пространства U. Рассмотрим в $T(U)$ подпространтсва $\mathrm{Symm}(U) = \bigoplus_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{Symm}^n U$ и $\mathrm{Alt}(U) = \bigoplus_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{Alt}^n U$. (Мы снова полагаем по определению $\mathrm{Symm}^0 U = \mathbb{K}$ и $\mathrm{Alt}^0 U = \mathbb{K}$.) Покажите, что $\mathrm{Symm}(U)$ и $\mathrm{Alt}(U)$ не замкнуты относительно умножения (приведите примеры!). Цель этой задачи — дать "исправленное" определение симметрических и кососимметрических тензоров, чтобы на них можно было ввести структуру алгебры. Для этого нам потребуется конструкция фактор-кольца в случае ассоциативных некоммутативных колец. Пусть T — такое кольцо.*
а) Подгруппа по сложению $I \subset T$ называется двусторонним идеалом, если $\forall\ x \in T$ и $\forall\ a \in I$ $xa \in I$ и $ax \in I$. Дайте определение факторкольца T/I и докажите, что оно является ассоциативным кольцом.
б) Пусть $\{t_\alpha\}$, $\alpha \in A$, $t_\alpha \in T$ — некоторое множество элементов из T. Докажите, что множество $I = \{\sum_{i=1}^{i=n} x_i t_{\alpha_i} y_i, \quad x_i \in T, y_i \in T, \alpha_i \in A, n \in \mathbb{N}\}$ является двусторонним идеалом. Он называется идеалом, порожденным элементами $\{t_\alpha\}$.
в) Обозначим через I_S идеал в $T(U)$, порожденный всеми тензорами вида $u \otimes v - v \otimes u$, где $u, v \in U$. Фактор-алгебра $S(U) = T(U)/I_S$ называется симметрической алгеброй пространства U. Докажите, что $S(U)$ коммутативна. Умножение в алгебре $S(U)$ обозначается точкой "$\cdot$".
г) Докажите, что если $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$, то в любом смежном классе $t + I_S \in S(U)$ имеется ровно один симметрический тензор, поэтому как векторное пространство алгебра $S(U)$ изоморфна $\mathrm{Symm}\,U$.
д) Обозначим через I_Λ идеал в $T(U)$, порожденный всеми тензорами вида $u \otimes u$, где $u \in U$. Фактор-алгебра $\Lambda(U) = T(U)/I_\Lambda$ называется внешней алгеброй пространства U. Умножение в алгебре $\Lambda(U)$ обозначается знаком "$\wedge$".
е) Докажите, что если $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 0$, то в любом смежном классе $t + I_\Lambda \in \Lambda(U)$ имеется ровно один кососимметрический тензор, поэтому как векторное пространство алгебра $\Lambda(U)$ изоморфна $\mathrm{Alt}(U)$.
ж) Найдите $\dim S^k(U)$ и $\dim \Lambda^k(U)$.

◇ **13.12.** *а) Пусть t_1 и t_2 — симметрические тензоры. Вычислите их произведение в $S(U)$, то есть найдите такой симметрический тензор w, что $(t_1 + I_S) \cdot (t_2 + I_S) = w + I_S$:*
1) $t_1 = u$, $t_2 = v$;   2) $t_1 = u \otimes v + v \otimes u$, $t_2 = z$;   3) $t_1 = u \otimes u$, $t_2 = v \otimes v$.
б) Докажите, что алгебра $S(U)$ изоморфна кольцу многочленов от n переменных, где $n = \dim U$.

◇ **13.13.** *а) Докажите, что если $t_1 \in \Lambda^k U$, $t_2 \in \Lambda^m U$, то $t_1 \wedge t_2 = (-1)^{km} t_2 \wedge t_1$.*
б) Докажите, что если $t \in \Lambda^k U$, то $t \wedge t = 0$.
в) Вычислите $(u + v \wedge z) \wedge (u + v \wedge z)$, где $u, v, z \in U$ линейно независимы.
г) Докажите, что $u_1, \ldots, u_k \in U$ линейно независимы тогда и только тогда, когда $u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \neq 0$.
д) Вычислите $w \wedge w$, где $w = p_1 e_2 \wedge e_3 + p_2 e_1 \wedge e_3 + p_3 e_1 \wedge e_3$, $p_i \in \mathbb{K}$, $e_1, e_2, e_3 \in U$ линейно независимы.
е) Вычислите $w \wedge w$, где $w = \sum_{i,j \in \{1,2,3,4\}; i<j} p_{ij} e_i \wedge e_j$, $p_{ij} \in \mathbb{K}$, $e_1, \ldots, e_4 \in U$ линейно независимы.

◇ **13.14.** *а) Кососимметрический тензор $w \in \Lambda^2 U$ называется разложимым, если $w = u \wedge v$, $u, v \in U$. Докажите, что если $\dim U = 3$, то любой тензор $w \in \Lambda^2 U$ разложим.*
б) Докажите, что если $\dim U = 4$, то $w \in \Lambda^2 U$ разложим тогда и только тогда, когда $w \wedge w = 0$.
в) Докажите, что имеется взаимно-однозначное соответствие между прямыми в проективном пространстве $\mathbb{P}(U)$ и разложимыми тезорими $w \in \Lambda^2 U$ с точночтью до пропорциональности. Выведите из этого, что множество прямых в трехмерном проективном пространстве явялется квадрикой в пятимерном проективном пространстве.