Задачи по группам и алгебрам Ли – 8

Каждая задача (со всеми пунктами) оценивается в 2 балла. Оценка за листок есть максимум из суммы баллов за задачи без звездочки и суммы баллов за задачи со звездочкой. Таким образом, для получения оценки 10 надо решить либо все задачи без звездочки, либо все задачи со звездочкой.

1. а) Покажите, что след квадрата ненулевой кососимметрической вещественной матрицы отрицателен. **б)** Покажите, что форма Киллинга касательной алгебры компактной группы Ли отрицательно определена.

2. Укажите какой-нибудь максимальный тор в группе Ли **а)** SU_n; **б)** $SO_n(\mathbb{R})$.

3. Найдите решетку весов и корни группы Ли **а)** SU_2; **б)** $SO_3(\mathbb{R})$; **в)** $SO_4(\mathbb{R})$; **г)** SU_3.

4. Пусть G – группа всех аффинных преобразований комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$. **а)** Найдите разрешимый радикал и какую-нибудь максимальную разрешимую подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$. **б)** Докажите, что на всяком неприводимом комплексном представлении группы Ли G радикал действует нулем. (*Указание:* по теореме Ли максимальная разрешимая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет в любом конечномерном представлении собственный вектор). **в)** Опишите все неприводимые представления группы Ли G с точностью до изоморфизма.

5. Разложите в прямую сумму неприводимых и найдите старшие веса неприводимых компонент следующих представлений: **а)** тензорный квадрат $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ тавтологического представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ (или группы Ли SU_3). **б)** тензорный квадрат $\mathbb{C}^5 \otimes \mathbb{C}^5$ тавтологического представления алгебры Ли $\mathfrak{so}_5(\mathbb{C})$ (или группы Ли $SO_5(\mathbb{R})$). **в)** внешний квадрат $\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)$ присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ (или группы Ли SU_3).

6*. Найдите кольцо когомологий **а)** $H^*(SU_3, \mathbb{C})$; **б)** $H^*(SO_4(\mathbb{R}), \mathbb{C})$.

7*. а) Докажите, что у всякой компактной полупростой группы Ли есть нетривиальный 3-мерный класс когомологий. **б)** Приведите пример стягиваемой полупростой группы Ли.

8*. а) Докажите, что не существует полупростых компактных групп размерностей $1, 2, 4, 5, 7$, а любой другой размерности – существуют. **б)** Опишите все связные полупростые компактные группы Ли размерности не более 8 с точностью до изоморфизма.

9*. *(Группа G_2)* Алгебра октав $\mathbb{O}$ – неассоциативная вещественная алгебра, состоящая из пар кватернионов (a, b) с умножением $(a, b)(c, d) = (ac - d\overline{b}, \overline{a}d + cb)$ (где черта обозначает сопряжение в кватернионах: $\overline{(x + iy + jz + kt)} = x - iy - jz - kt$). **а)** Покажите, что "сопряжение" $(a, b) \to (\overline{a}, -b)$ есть антиавтоморфизм алгебры $\mathbb{O}$, причем $(a, b)(\overline{a}, -b)$ – положительное вещественное число при $(a, b) \neq (0, 0)$. **б)** Найдите все элементы $s \in \mathbb{O}$, что $s^2 = -1$. Для каждого такого s найдите все элементы, антикоммутирующие с s (т.е. все такие $s' \in \mathbb{O}$, что $ss' = -s's$). **в)** Докажите, что любая тройка попарно антикоммутирующих элементов s_1, s_2, s_3 такая, что $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = -1$ и $(s_1 s_2) s_3 = -s_3 (s_1 s_2)$, порождает $\mathbb{O}$. **г)** Докажите, что группа автоморфизмов алгебры октав является компактной полупростой группой Ли.

10*. Найдите размерность, максимальный тор и систему корней группы G_2. Докажите, что эта группа проста.