

## Задачи к экзамену по группам и алгебрам Ли

На экзамене будут задачи, похожие на некоторые из приведенных ниже.

1. Найдите центры групп Ли **а)**  $SL_3(\mathbb{C})$ ; **б)**  $U_3$ ; **в)**  $SO_4(\mathbb{C})$ ; **г)**  $SO_4(\mathbb{R})$ .
2. Найдите группу компонент **а)**  $\pi_0(GL_3(\mathbb{C}))$ ; **б)**  $\pi_0(GL_3(\mathbb{R}))$ .
3. Найдите фундаментальную группу **а)**  $\pi_1(SL_3(\mathbb{C}))$ ; **б)**  $\pi_1(SL_3(\mathbb{R}))$ ; **в)**  $\pi_1(SU_3)$ ; **г)**  $\pi_1(SO_4(\mathbb{R}))$ .
4. Опишите все связные группы Ли с алгеброй Ли **а)**  $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ ; **б)**  $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2$  с точностью до изоморфизма.
5. Пусть  $G$  – группа Ли **а)** всех аффинных преобразований пространства  $\mathbb{C}^2$ ; **б)** всех линейных преобразований  $\mathbb{C}^3$ , сохраняющих данную прямую. Найдите разрешимый радикал алгебры Ли  $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$  и какую-нибудь максимальную разрешимую подалгебру Ли в  $\mathfrak{g}$ .
6. Пусть  $G$  – группа Ли **а)** всех аффинных преобразований пространства  $\mathbb{C}^2$ ; **б)** всех линейных преобразований  $\mathbb{C}^3$ , сохраняющих данную прямую. Найдите коммутант  $G'$  группы Ли  $G$ .
7. Опишите с точностью до изоморфизма все 6-мерные комплексные представления группы Ли **а)**  $SL_2(\mathbb{C})$ ; **б)**  $U_2$ ; **в)**  $SO_3(\mathbb{C})$ ; **г)**  $SO_3(\mathbb{R})$ ; **д)**  $SL_3(\mathbb{C})$ ; **е)**  $U_3$ ; **ж)**  $SO_4(\mathbb{C})$ ; **з)**  $SO_4(\mathbb{R})$ .
8. Разложите в прямую сумму неприводимых **а)** представление группы Ли  $SO_4(\mathbb{R})$  сопряжениями в пространстве вещественных симметрических матриц  $4 \times 4$ ; **б)** внешний квадрат  $\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)$  присоединенного представления группы Ли  $SL_3(\mathbb{C})$ ; **в)** симметрический куб  $S^3(\mathfrak{su}_2)$  присоединенного представления группы Ли  $SU_2$ .