

Задачи к экзамену по группам и алгебрам Ли

На экзамене будут задачи, похожие на некоторые из приведенных ниже.

1. Найдите центры групп Ли **а)** $SL_3(\mathbb{C})$; **б)** U_3 ; **в)** $SO_4(\mathbb{C})$; **г)** $SO_4(\mathbb{R})$.
2. Найдите группу компонент **а)** $\pi_0(GL_3(\mathbb{C}))$; **б)** $\pi_0(GL_3(\mathbb{R}))$.
3. Найдите фундаментальную группу **а)** $\pi_1(SL_3(\mathbb{C}))$; **б)** $\pi_1(SL_3(\mathbb{R}))$; **в)** $\pi_1(SU_3)$; **г)** $\pi_1(SO_4(\mathbb{R}))$.
4. Опишите все связные группы Ли с алгеброй Ли **а)** $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$; **б)** $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2$ с точностью до изоморфизма.
5. Пусть G – группа Ли **а)** всех аффинных преобразований пространства \mathbb{C}^2 ; **б)** всех линейных преобразований \mathbb{C}^3 , сохраняющих данную прямую. Найдите разрешимый радикал алгебры Ли $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$ и какую-нибудь максимальную разрешимую подалгебру Ли в \mathfrak{g} .
6. Пусть G – группа Ли **а)** всех аффинных преобразований пространства \mathbb{C}^2 ; **б)** всех линейных преобразований \mathbb{C}^3 , сохраняющих данную прямую. Найдите коммутант G' группы Ли G .
7. Опишите с точностью до изоморфизма все 6-мерные комплексные представления группы Ли **а)** $SL_2(\mathbb{C})$; **б)** U_2 ; **в)** $SO_3(\mathbb{C})$; **г)** $SO_3(\mathbb{R})$; **д)** $SL_3(\mathbb{C})$; **е)** U_3 ; **ж)** $SO_4(\mathbb{C})$; **з)** $SO_4(\mathbb{R})$.
8. Разложите в прямую сумму неприводимых **а)** представление группы Ли $SO_4(\mathbb{R})$ сопряжениями в пространстве вещественных симметрических матриц 4×4 ; **б)** внешний квадрат $\Lambda^2(\mathfrak{sl}_3)$ присоединенного представления группы Ли $SL_3(\mathbb{C})$; **в)** симметрический куб $S^3(\mathfrak{su}_2)$ присоединенного представления группы Ли SU_2 .