Лекции по группам и алгебрам Ли – 13,14

Материал этой лекции (значительно подробнее) содержится в главе 5 книги Серра "Алгебры Ли и группы Ли".

Нильпотентные и разрешимые алгебры Ли

Определение 1. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *нильпотентной*, если найдется такое натуральное N, что для любого набора $x_1, \ldots, x_N \in \mathfrak{g}$ выполнено $[x_1, [x_2, \ldots [x_{N-1}, x_N] \ldots]] = 0$ (т.е. $[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \ldots [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \ldots]] = 0$). Аналогично определятся *нильпотентная группа Ли.*

Свойство нильпотентности алгебры Ли равносильно тому, что в алгебре Ли имеется базис, в котором все операторы $\operatorname{ad} x$ записываются строго верхнетреугольными матрицами.

Определение 2. *Производным рядом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется цепочка идеалов $\mathfrak{g} = D^0\mathfrak{g} \supset D^1\mathfrak{g} \supset \ldots$, определяемая индуктивно как $D^k\mathfrak{g} := [D^{k-1}\mathfrak{g}, D^{k-1}\mathfrak{g}]$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *разрешимой*, если найдется такое натуральное N, что $D^N\mathfrak{g} = 0$. Аналогично определятся *разрешимая группа Ли.*

Предложение 1. *Всякая нильпотентная алгебра Ли разрешима.*

Доказательство. В самом деле, $D^N\mathfrak{g} \subset [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \ldots (\text{N раз}) \ldots [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \ldots]]$. □

Примеры.

(1) Алгебра Ли $\mathfrak{n}_+(n)$ строго верхнетреугольных матриц нильпотентна.
(2) Алгебра Ли $\mathfrak{b}_+(n)$ нестрого верхнетреугольных матриц разрешима, но не нильпотентна при $n > 1$.

Предложение 2. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда найдется цепочка идеалов $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_N = \mathfrak{g}$, что каждая факторалгебра Ли $\mathfrak{g}_{i+1}/\mathfrak{g}_i$ абелева.*

Доказательство. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима, тогда в качестве $\mathfrak{g}_i$ можно взять $D^{N-i}\mathfrak{g}$. Обратно, если $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_N = \mathfrak{g}$ – цепочка идеалов, удовлетворяющая условию, то $D^{N-i}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_i$, а значит, $D^N\mathfrak{g} = 0$. □

Предложение 3. *Все под- и фактралгебры разрешимой (соотв. нильпотентной) алгебры Ли разрешимы (соотв. нильпотентны). Расширение разрешимой алгебры Ли при помощи разрешимой (т.е. такая алгебра Ли $\mathfrak{g}$, в которой есть разрешимый идеал I, фактор $\mathfrak{g}/I$ по которому также разрешим) есть разрешимая алгебра Ли.*

Доказательство. в задачах. □

Предложение 4. *Связная односвязная группа Ли G, соответствующая разрешимой алгебре Ли $\mathfrak{g}$, диффеоморфна $\mathfrak{g}$ при помощи экспоненциального отображения. Если алгебра Ли нильпотентна, то операцию умножения в группе G можно задать полиномиальными формулами.*

Доказательство. Выберем цепочку идеалов $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_N = \mathfrak{g}$ как в предложении 2. Можно считать, что $\dim \mathfrak{g}_{i+1}/\mathfrak{g}_i = 1$. Будем строить группу Ли G по индукции. Пусть $G_i = \exp(\mathfrak{g}_i)$ – односвязная группа Ли, соответствующая $\mathfrak{g}_i$. Пусть $x \in \mathfrak{g}_{i+1} \backslash \mathfrak{g}_i$. Определим на пространстве $G_{i+1} := \mathbb{R} \times G_i$ структуру группы Ли следующим образом:

$$(s, g) * (t, h) := (s + t, e^{-t \operatorname{ad} x}(g) * h).$$

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то каждый оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, а следовательно $e^{-t \operatorname{ad} x}$ – полином от t, что и требовалось. □

Следствие 1. *Связная группа Ли G разрешима (нильпотентна) тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ разрешима (нильпотентна).*

ТЕОРЕМА ЭНГЕЛЯ

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– подалгебра Ли в* $\mathfrak{gl}(V)$*, состоящая из нильпотентных операторов. Тогда в пространстве* V *существует базис, в котором все элементы из* $\mathfrak{g}$ *записываются строго верхнетреугольными матрицами. В частности, алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *нильпотентна.*

Доказательство. Достаточно доказать, что найдется общий собственный вектор для всех элементов из $\mathfrak{g}$ (выбираем такой вектор в качестве первого базисного и переходим к факторпространству по этому вектору). Докажем это индукцией по размерности алгебры Ли $\mathfrak{g}$. База индукции очевидна (собственный вектор для одного оператора существует), произведем шаг индукции.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{h}$ *– подалгебра Ли в* $\mathfrak{g}$*. Тогда существует такая подалгебра Ли* $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}$*, что* $\mathfrak{h}$ *является идеалом коразмерности* 1 *в* $\mathfrak{h}_1$*.*

Доказательство. Заметим, что для всякого $x \in \mathfrak{g}$ оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, и применим предположение индукции к представлению алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. ☐

Таким образом, максимальная (по включению) подалгебра Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ является идеалом коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$. Пусть $W \subset V$ – пространство собственных векторов для всех элементов $\mathfrak{h}$ (ненулевое по предположению индукции), и пусть x – какой-нибудь элемент $\mathfrak{g}$, не лежащий в $\mathfrak{h}$. Тогда оператор x сохраняет подпространство W, а значит, имеет в нем собственный вектор.

☐

Следствие 2. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *нильпотентна тогда и только тогда, когда для всякого* $x \in \mathfrak{g}$ *оператор* $\operatorname{ad} x$ *нильпотентен.*

ТЕОРЕМА ЛИ

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– разрешимая подалгебра Ли в* $\mathfrak{gl}(V)$ *(над полем* $\mathbb{C}$*). Тогда в пространстве* V *существует базис, в котором все элементы из* $\mathfrak{g}$ *записываются верхнетреугольными матрицами.*

Замечание: над полем $\mathbb{R}$ это неверно.

Доказательство. Как и в теореме Энгеля, достаточно найти общий собственный вектор для всех элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Будем вести индукцию по размерности алгебры Ли $\mathfrak{g}$. База индукции очевидна (собственный вектор для одного оператора существует), произведем шаг индукции. Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – идеал коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$, $W \subset V$ – пространство собственных векторов для всех элементов $\mathfrak{h}$, на котором всякий элемент $y \in \mathfrak{h}$ действует скалярным оператором $\chi(y)$, и пусть x – какой-нибудь элемент $\mathfrak{g}$, не лежащий в $\mathfrak{h}$.

Лемма 2. *Имеем* $\chi([x, \mathfrak{h}]) = 0$.

Доказательство. Пусть $w \in W$. Тогда пространство $W_1 := \mathbb{C}\{w, xw, x^2w, \ldots\}$ инвариантно относительно $\mathfrak{g}$. Пусть $w, xw, x^2w, \ldots, x^nw$ – базис в пространстве W_1. Тогда в этом базисе всякий оператор $y \in \mathfrak{h}$ верхнетреугolen с диагональными элементами $\chi(y)$. Пусть $\chi([x,z]) \neq 0$ для некоторого $z \in \mathfrak{h}$. Тогда $\operatorname{tr}_{W_1}[x,z] = n\chi([x,z]) \neq 0$, что невозможно. ☐

Из леммы следует, что $W_1 \subset W$, и в качестве искомого вектора можно взять какой-нибудь собственный вектор оператора x в пространстве W_1.

☐

Следствие 3. *Коммутант разрешимой алгебры Ли нильпотентен.*

Критерий Картана и полупростые алгебры Ли

Теорема 3 (Критерий Картана)**.** *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– подалгебра Ли в* $\mathfrak{gl}(V)$ *(над полем* $\mathbb{C}$*), такая, что для любых* $x \in \mathfrak{g}$, $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *выполнено* $\operatorname{tr} xy = 0$*. Тогда алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *разрешима.*

Замечание. Обратное очевидно из теоремы Ли.

Доказательство.

Лемма 3. *Пусть* $x \in \mathfrak{gl}(V)$ *таков, что* $\operatorname{ad} x(\mathfrak{g}) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$*. Тогда в предположениях теоремы для всех* $y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *имеем* $\operatorname{tr} xy = 0$*.*

Доказательство. Пусть $y = [a, b]$, тогда

$$\operatorname{tr} x[a, b] = \operatorname{tr} xab - xba = \operatorname{tr} xab - axb = \operatorname{tr}(xa - ax)b = 0.$$

☐

Согласно теореме Энгеля, достаточно доказать, что всякий элемент $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентен. Поэтому критерий Картана следует из следующей леммы:

Лемма 4. *Пусть* $A \subset B \subset \mathfrak{gl}(V)$ *и пусть* $M = \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid \operatorname{ad} x(B) \subset A\}$*. Тогда если* $x \in M$ *и для всякого* $y \in M$ *выполнено* $\operatorname{tr} xy = 0$*, то* x *нильпотентен.*

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{ad}(M)$ – подалгебра без единицы в $\operatorname{End}(\mathfrak{gl}(V))$ (т.е. если $x \in M$ и $\operatorname{ad} y$ есть многочлен без свободного члена от $\operatorname{ad} x$, то $y \in M$). Пусть x_s – полупростая часть оператора x. Тогда $x_s \in M$ (так как $\operatorname{ad} x_s$ есть многочлен без свободного члена от $\operatorname{ad} x$), и $\bar{x}_s$ – тоже (поскольку $\operatorname{ad} \bar{x}_s$ есть многочлен без свободного члена от $\operatorname{ad} x_s$). ☐

☐

Следствие 4. *Если форма Киллинга алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *нулевая, то алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *разрешима.*

Доказательство. Согласно критерию Картана, алгебра Ли $\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ разрешима, а значит и $\mathfrak{g}$ разрешима. ☐

Определение 3. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *полупростой*, если она не содержит нетривиальных разрешимых идеалов.

Примеры.

1. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ проста и, в частности, полупроста.
2. Алгебра Ли аффинных преобразований плоскости неполупроста и неразрешима.

Следствие 5. *Алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга невырождена.*

Доказательство. Ограничение формы Киллинга на идеал совпадает с формой Киллинга этого идеала. Следовательно, ядро формы Киллинга является разрешимым идеалом по критерию Картана. Обратно: достаточно доказать, что нет *абелевых* идеалов (поскольку последний ненулевой коммутант радикала является идеалом). Пусть $I \subset \mathfrak{g}$ – абелев идеал, и $x \in I$, $y \in \mathfrak{g}$. Имеем $(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)^2 = 0$, а значит, $\operatorname{tr} \operatorname{ad} x \operatorname{ad} y = 0$. ☐

Следствие 6. *Алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда она раскладывается в прямую сумму неабелевых простых алгебр Ли.*

Доказательство. Покажем, что ограничение формы Киллинга на каждый идеал невырождено: в самом деле, пусть I – идеал в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, тогда радикал ограничения формы Киллинга на I – тоже идеал, разрешимый по следствию из критерия Картана. Следовательно, для всякого идеала $I \subset \mathfrak{g}$ пересечение $I \cap I^{\perp} = 0$. Но $I^{\perp}$ – тоже идеал, значит, присоединенное представление вполне приводимо. ☐

Предложение 5. *Во всякой комплексной алгебре Ли имеется наибольший (по включению) разрешимый идеал, называемый* разрешимым радикалом *этой алгебры Ли. Фактор алгебры Ли по ее разрешимому радикалу полупрост.*

Доказательство. Если исходная алгебра Ли полупроста, то все доказано. Иначе, выберем какой-нибудь разрешимый идеал и сведем задачу к фактору по этому идеалу. □