Приложения интеграла

Задача 1. Вычислите меру следующих множеств:

a) круг на плоскости $x^2 + y^2 \leqslant R^2$;

b) конус в пространстве $x^2 + y^2 \leqslant kz^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$;

c) шар в пространстве $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$;

d) шар в $\mathbb{R}^n$ $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2$.

Определение 1. Пусть $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ — кривая. Будем говорить, что эта кривая *спрямляема*, если существует

$$l(\phi) = \sup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 0=t_1<t_2<\cdots<t_n=1}} \sum_{k=1}^{n-1} |\phi(t_{k+1}) - \phi(t_k)|.$$

В этом случае $l(\phi)$ называется *длиной* кривой ϕ.

Задача 2. a) Докажите, что график функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ с непрерывной производной спрямляем, и его длина равна $\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$.

b) Оцените преимущества трезвости. Во сколько раз длина синусоиды на $[0, k\pi]$ отличается от длины этого отрезка?

c) Докажите, что если частные производные ϕ непрерывны, то кривая спрямляема, и её длина равна $\int_0^1 \sqrt{|d_t\phi|}dt$. Здесь дифференциал $d_t\phi$ в точке t рассматривается как вектор в $\mathbb{R}^n$, и $|d_t\phi|$ — длина этого вектора.

d^*) Приведите пример непрерывной, но не спрямляемой кривой.

Задача 3. a) Вычислите $I_n = \int_0^\pi \sin^n(x)dx$.

b) Докажите, что последовательность I_n монотонно убывает, и $\lim\limits_{n\to\infty} I_{n+1}/I_n = 1$. Выведите отсюда *формулу Валлиса*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 4 (Формула Стирлинга). a) Докажите, что вычисление $\int_1^n \log(x)dx$ методом трапеций (см. задачу 16.13) с узлами в целых точках даёт результат $\ln(n!) - \ln(n)/2$.

b) Докажите, что погрешность такого вычисления монотонно возрастает по n и ограничена. Выведите отсюда, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$.

c) Используя формулу Валлиса, найдите этот предел.

Задача 5. a) Пусть $W(x)$ — неотрицательная непрерывная функция на $[-1,1]$ отличная от нуля. Докажите, что выражение $(P,Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)W(x)dx$ задаёт скалярное произведение (положительно определённую билинейную симметрическую форму) на пространстве многочленов.

b) Докажите, что *многочлены Лежандра* $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$ ортогональны относительного определённого выше скалярного произведения с $W(x) = 1$.

c) Мы уже знаем из Листка 3, что найдутся такие *многочлены Чебышёва 1 рода* T_n, что $\cos(nt) = T_n(\cos(t))$. Докажите, что многочлены $T_n(x)$ ортогональны относительно определённого выше скалярного произведения с $W(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.

d) Мы уже знаем из Листка 3, что найдутся такие *многочлены Чебышёва 2 рода* U_n, что $\sin((n+1)t) = \sin(t)\cdot U_n(\cos(t))$. Докажите, что многочлены $U_n(x)$ ортогональны относительно определённого выше скалярного произведения с $W(x) = \sqrt{1-x^2}$.

e^*) Вычислите скалярный квадрат многочленов P_n, T_n и U_n относительно соответствующих скалярных произведений.