

Алгебра. Листок 14.

В этом листке все линейные пространства предполагаются определенными над полем комплексных чисел \mathbb{C} и конечномерными.

◇ **14.1.** Дайте определение матрицы полуторалинейной формы f на конечномерном линейном пространстве V над \mathbb{C} в данном базисе. Докажите, что при переходе к новому базису с матрицей перехода T матрица формы преобразуется по закону $\hat{f}_{\text{нов}} = T^T \hat{f}_{\text{стар}} \bar{T}$.

◇ **14.2.** Докажите, что всякую полуторалинейную форму $f(u, v)$ ранга 1 на V можно представить в виде $f(u, v) = \varphi(u)\psi(\bar{v})$, где $\varphi, \psi \in V^*$.

◇ **14.3.** а) Пусть p — невырожденная полуторалинейная форма на V . Докажите, что $\forall \varphi \in V^* \exists v_\varphi \in V$, так что $\forall u \in V \varphi(u) = p(u, v_\varphi)$.

б) Докажите, что сопоставление $\varphi \mapsto v_\varphi$ задает полулинейное взаимно-однозначное соответствие между V^* и V . (Образование комплексных линейных пространств $\varphi : U \rightarrow W$ называется полулинейным, если $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$ и $\varphi(\lambda u) = \bar{\lambda}\varphi(u)$.)

◇ **14.4.** а) Пусть V — n -мерное линейное пространство над \mathbb{C} . Обозначим через $V_{\mathbb{R}}$ то же самое пространство, но рассматриваемое как линейное пространство над \mathbb{R} . Докажите, что $V_{\mathbb{R}}$ имеет размерность $2n$ над \mathbb{R} .

б) Пусть f — эрмитова форма на V . Докажите, что $\operatorname{Re} f(u, v)$ и $\operatorname{Im} f(u, v)$ являются, соответственно, симметрической и кососимметрической билинейными формами на $V_{\mathbb{R}}$.

в) Пусть e_1, \dots, e_n — базис пространства V , а $A = \operatorname{Re} \hat{f}$ и $B = \operatorname{Im} \hat{f}$ соответственно вещественная и мнимая части матрицы формы f в этом базисе. Найдите матрицы форм $\operatorname{Re} f(u, v)$ и $\operatorname{Im} f(u, v)$ на $V_{\mathbb{R}}$ в базисе $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ (докажите, что это базис $V_{\mathbb{R}}$!).

г) Докажите, что положительность эрмитовой формы f равносильна положительности билинейной формы $\operatorname{Re} f(u, v)$ на $V_{\mathbb{R}}$.

◇ **14.5.** а) Пусть W — n -мерное линейное пространство над \mathbb{R} с симметричной билинейной формой $b(u, v)$. Рассмотрим его комплексификацию $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$ и отождествим W с подмножеством тензоров $1 \otimes u$, $u \in W$. Докажите, что W является n -мерным подпространством вещественного $2n$ -мерного **вещественного** пространства $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} W$, но **не является** комплексным подпространством в $W_{\mathbb{C}}$.

б) Пусть на W задана симметричная билинейная форма $b(u, v)$. Докажите, что форма $p_b(\alpha \otimes u, \beta \otimes v) = \alpha \bar{\beta} b(u, v)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) является эрмитовой формой на $W_{\mathbb{C}}$, причем матрица билинейной формы b в базисе e_1, \dots, e_n пространства W совпадает с матрицей эрмитовой формы p_b в базисе $1 \otimes e_1, \dots, 1 \otimes e_n$ пространства $W_{\mathbb{C}}$. Докажите, что если форма b положительна на W , то p_b положительна на $W_{\mathbb{C}}$.

в) Пусть p — произвольная эрмитова форма на $W_{\mathbb{C}}$. Докажите, что $b_p(u, v) = \operatorname{Re} p(1 \otimes u, 1 \otimes v)$ является симметрической билинейной формой на W . Докажите, что если эрмитова форма p положительна на $W_{\mathbb{C}}$, то билинейная форма b положительна на W .

г) Верно ли, что если билинейная форма b положительна на W , то эрмитова форма p положительна на $W_{\mathbb{C}}$?

◇ **14.6.** Пусть U — линейное подпространство в V над \mathbb{C} , (u, v) — эрмитово скалярное произведение на V . Докажите, что множество $U^\perp = \{v \in V, (u, v) = 0 \forall u \in U\}$ является линейным подпространством в V , причем если скалярное произведение положительно, то $V = U \oplus U^\perp$.

◇ **14.7.** 1) Пусть U — линейное подпространство в V над \mathbb{C} , (u, v) — положительное эрмитово скалярное произведение на V . Пусть в U имеется ортонормированный базис e_1, \dots, e_k , $v \in V$, $v \notin U$. Докажите, что существует единственное разложение $v = u + w$, так что $u \in U$, $w \in U^\perp$. Найдите разложение $u \in U$ по базису e_1, \dots, e_k .

2) Докажите, что процесс ортогонализации Грамма-Шмидта позволяет построить по любому базису g_1, \dots, g_n такой ортонормированный базис e_1, \dots, e_n , матрица перехода к которому является верхнетреугольной.

◇ 14.8. 1) Пусть f — линейный оператор на V . Докажите, что функции от двух аргументов $u, v \in V$, определенные равенствами $p_f(u, v) = (f(u), v)$ и $q_f(u, v) = (u, f(v))$, являются полуторалинейными формами на V .

2) Докажите, что сопоставления $f \mapsto p_f$ и $f \mapsto q_f$ являются взаимно-однозначными соответствиями между множеством \mathcal{L} линейных операторов на V и множеством \mathcal{P} полуторалинейных форм на V . Докажите, что \mathcal{L} и \mathcal{P} являются комплексными линейными пространствами.

3) Докажите, что сопоставление $f \mapsto p_f$ является линейным отображением \mathcal{L} на \mathcal{P} , а сопоставление $f \mapsto q_f$ является полулинейным отображением \mathcal{L} на \mathcal{P} . (Определение полулинейного отображения см. в задаче 14.3.)

4) Докажите, что сопоставление $f \mapsto f^*$ является взаимно-однозначным полулинейным отображением \mathcal{L} на \mathcal{L} .

◇ 14.9. 1) Докажите, что множество самосопряженных операторов и множество антисамосопряженных операторов являются линейными пространствами над полем действительных чисел \mathbb{R} .

2) Докажите, что f самосопряженный оператор $\Leftrightarrow if$ антисамосопряженный.

3) Докажите, что любой оператор f можно единственным образом представить в виде $f = g + ih$, где g и h самосопряженные операторы.

◇ 14.10. Докажите, что оператор f самосопряжен тогда и только тогда, когда его матрица в ортонормированном базисе представляется в виде $\hat{f} = A + iB$, где матрицы A и B вещественны, причем матрица A симметрична, а B — кососимметрична.

◇ 14.11. Докажите, что у любого самосопряженного оператора существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов, причем все собственные значения вещественны.

◇ 14.12. Самосопряженный оператор f называется положительным, если эрмитова форма $p_f(u, v)$ положительна. Докажите, что f положителен тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны.

◇ 14.13. Докажите, что из любого положительного самосопряженного оператора f можно однозначно извлечь положительный корень любой натуральной степени n , т.е. существует единственный положительный самосопряженный оператор g такой, что $f = g^n$.

◇ 14.14. Пусть f любой оператор. Докажите, что операторы ff^* и f^*f самосопряженные и положительные.

◇ 14.15. Пусть f и g — два любые коммутирующие оператора в конечномерном пространстве над \mathbb{C} . Докажите, что у них есть общий собственный вектор.

◇ 14.16. Докажите, что два самосопряженных оператора коммутируют тогда и только тогда, когда у них существует общий диагонализующий ортонормированный базис.

◇ 14.17. Докажите, что матрица оператора f диагональна в некотором ортонормированном базисе тогда и только тогда, когда $ff^* = f^*f$. Такие операторы называются нормальными.

◇ 14.18. Пусть оператор f представлен в виде $f = g + ih$, где g и h самосопряженные операторы. Докажите, что f нормален тогда и только тогда, когда операторы g и h коммутируют, т.е. $hg = gh$.

◇ 14.19. 1) Докажите, что унитарный оператор нормален.

2) Докажите, что все собственные значения унитарного оператора по модулю равны единице.

◇ 14.20. 1) Докажите, что любой невырожденный оператор f можно единственным образом представить в виде $f = gh$ и $f = h'g'$, где операторы g и g' унитарны, а h и h' положительные самосопряженные.

2) Докажите, что $g = g'$ и $h = h'$ тогда и только тогда, когда оператор f нормален.

◇ 14.21. Докажите, что любая унитарная 2×2 матрица с определителем 1 имеет вид $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$, где $z, w \in \mathbb{C}$, $|z|^2 + |w|^2 = 1$.

◇ 14.22. а) Сколько существует целочисленных унитарных матриц 2×2 ? Докажите, что все такие матрицы образуют группу.

б) Можно ли эту группу представить в виде прямого произведения двух групп?