

В. А. Васильев
ТОПОЛОГИЯ — ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ
4 модуль, весна 2011 г.

1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ.

Обсудим теперь более подробно векторные расслоения.

Локально тривиальное расслоение $E \rightarrow B$ со слоем F называется векторным, если во всех его слоях имеется структура векторного пространства. При этом стандартные операции векторного пространства в слоях должны непрерывно меняться от слоя к слою. Это означает следующее. Для двух непрерывных сечений над любым открытым подмножеством в базе можно поточечно определить их сумму. Она должна тоже быть непрерывным сечением. Аналогичное свойство должно выполняться для умножения на число.

Векторное расслоение называется вещественным или комплексным в зависимости от того, векторными пространствами над каким полем являются его слои; часто рассматривают также кватернионные векторные расслоения.

Самые важные векторные расслоения — касательное, кокасательное, расслоение k -струй функций или отображений в R^n , тензорные расслоения.

Для двух векторных расслоений с одной и той же базой можно построить их прямое произведение, тензорное произведение, *Hom*. Можно также построить фактор расслоения по его подрасслоению. Результаты всех этих операций вновь будут векторными расслоениями.

Простейшее нетривиальное векторное расслоение — это расслоение листа Мёбиуса над S^1 со слоем R^1 : при обходе вдоль базы ориентация его слоев превращается в противоположную.

Векторное расслоение называется *ориентируемым*, если существует одновременная ориентация всех его слоев, непрерывно зависящая от слоя. Комплексные и кватернионные расслоения автоматически являются ориентируемыми.

Одна из стандартных задач теории векторных расслоений, решаемая с помощью характеристических классов — это задача о всюду ненулевых сечениях.

Например, всюду ненулевое сечение касательного расслоения — это векторное поле без особых точек. Для замкнутого связного многообразия M такое поле существует тогда и только тогда, когда $\chi(M) = 0$. Можно также рассматривать задачу о построении двух, трех и т.д. линейно независимых в каждой точке векторных полей. Если на n -мерном многообразии можно построить n линейно независимых векторных полей, то такое многообразие называют *параллелизуемым*.

Объекты, различающие неизоморфные расслоения, обычно определяются как классы когомологий базы расслоения; они называются характеристическими классами.

Один пример такого класса мы фактически уже знаем. Действительно, векторному расслоению $E \xrightarrow{F} B$ можно сопоставить сферическое расслоение $E' \xrightarrow{S^{n-1}} B$, где $n = \dim F$. Его слой над точкой $b \in B$ — это пространство всех лучей в слое над b исходного расслоения, выходящих из нулевой точки слоя. (Эквивалентное определение: немного ниже мы покажем, что можно ввести

евклидову структуру во всех слоях расслоения E , непрерывно зависящую от слоев. Тогда слой расслоения E' можно определить как множество векторов единичной длины в слое E .)

Первое препятствие к построению сечения сферического расслоения принадлежит группе $H^n(B, \{\mathbf{Z}\})$, где $\mathbf{Z} = \pi_{n-1}(S^{n-1})$. В рассматриваемой ситуации простота расслоения эквивалентна его ориентируемости. Если расслоение ориентируемо, то локальная система $\{\mathbf{Z}\}$ тривиальна, и первое препятствие к построению сечения лежит в $H^n(B, \mathbf{Z})$. Его называют *эйлеровым классом* ориентированного расслоения. (Для неориентированного расслоения тоже можно определить эйлеров класс. Он будет элементом $H^n(B, \text{Or})$, где Or — ориентирующий пучок этого расслоения.)

Конечно, любое тривиальное расслоение имеет сечение, поэтому расслоение с нетривиальным эйлеровым классом нетривиально. Более общим образом, если два расслоения имеют разные эйлеровы классы, то они неизоморфны.

Если B — гладкое связное ориентируемое многообразие без края, и рассматриваемое расслоение E — его касательное расслоение, то $H^n(B, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$, и эйлеров класс характеризуется единственным числом — своим значением на фундаментальном цикле многообразия. Это число в точности равно эйлеровой характеристике многообразия.

Мы знаем еще один характеристический класс, позволяющий утверждать, что если он нетривиален, то и расслоение нетривиально. Это — класс, отвечающий за ориентацию. Он лежит в $H^1(B, \mathbf{Z}_2)$ и сопоставляет каждому замкнутому пути элемент группы $\mathbf{Z}_2$: если путь сохраняет ориентацию, то ему сопоставляется 0, а если изменяет — то 1. Этот характеристический класс называют первым классом Штифеля — Уитни и обозначают w_1 .

Для n -мерного расслоения n -й класс Штифеля — Уитни определяется как эйлеров класс, приведенный mod 2. Этот класс обозначают через w_n . Он определен и для неориентируемого расслоения и лежит в $H^n(B, \mathbf{Z}_2)$.

Кроме этих двух классов существуют и другие классы Штифеля — Уитни. Мы сначала сформулируем их свойства, а существование и единственность характеристических классов, обладающих этими свойствами, докажем позже.

Пусть $E \xrightarrow{\mathbf{R}^n} B$ — n -мерное векторное расслоение, причем B — связное клеточное пространство. Тогда имеется набор классов когомологий $w_0, w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots$, где $w_i \in H^i(B, \mathbf{Z}_2)$. При этом $w_0 = 1$ (группа H^0 состоит из двух элементов — тривиального и нетривиального; имеется в виду, что w_0 равен нетривиальному элементу). Кроме того, $w_i = 0$ при $i > n$.

Напомним понятие индуцированного расслоения. Пусть имеется расслоение $E \rightarrow B$ и отображение $B' \xrightarrow{\varphi} B$:

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \downarrow p & \\ B' & \xrightarrow{\varphi} & B. \end{array}$$

Тогда над B' возникает расслоение $E' \rightarrow B'$, где

$$E' = \{(b', \xi) \in B' \times E \mid \varphi(b') = p(\xi)\}.$$

Проекция имеет вид $(b', \xi) \mapsto b' \in B'$. Слой над b' канонически отождествляется со слоем расслоения E над $\varphi(b')$.

Свойство (ЕСТЕСТВЕННОСТЬ ПРИ ИНДУЦИРОВАНИИ):

$$w_i(E') = \varphi^*(w_i(E)).$$

Для двух векторных расслоений E и G над одной и той же базой можно определить их прямую сумму $E \oplus G$ (сумму Уитни), взяв прямые суммы слоев.

ФОРМУЛА УИТНИ ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ: для любого $i \geq 0$,

$$w_i(E \oplus G) = w_i(E) + w_{i-1}(E)w_1(G) + w_{i-2}(E)w_2(G) + \cdots + w_1(E)w_{i-1}(G) + w_i(G).$$

Здесь имеется в виду когомологическое умножение.

Запись формулы Уитни можно упростить, если ввести полный, или тотальный, класс Штифеля — Уитни

$$w(E) = w_0(E) + w_1(E) + w_2(E) + \cdots + w_n(E) \in H^*(B, \mathbf{Z}_2).$$

Для полных классов формула Уитни записывается так: $w(E \oplus G) = w(E)w(G)$.

Всеми указанными свойствами обладает полный класс, тождественно равный 1 для всех расслоений. Чтобы его исключить, наложим еще условие нетривиальности: для расслоения листа Мёбиуса над окружностью $w_1 \neq 0$.

Утверждается, что такое правило сопоставления расслоению классов когомологий существует и единственно. Выведем из этого утверждения некоторые следствия.

1. Изоморфным расслоениям (над одной базой) соответствуют одинаковые классы Штифеля — Уитни. Это следует из естественности.

1,5. Одномерное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда $w_1 = 0$.

2. Если расслоение E тривиально, то $w(E) = 1 \in H^*(B, \mathbf{Z}_2)$. В самом деле, расслоение E можно получить операцией индуцирования из тривиального расслоения над точкой. (Другое доказательство можно получить с помощью 1,5 и расщепления тривиального расслоения в сумму тривиальных одномерных.)

3. Если существует всюду ненулевое сечение, то $w_n = 0$. Действительно, тогда расслоение можно представить в виде прямой суммы тривиального расслоения, соответствующего сечению, и его *ортогонального дополнения*. Далее нужно воспользоваться формулой Уитни.

Ортогональное дополнение, используемое в этом рассуждении, определяется при помощи следующего дополнительного построения.

Евклидовой структурой на векторном расслоении E называется непрерывная функция $E \rightarrow \mathbf{R}$, в ограничении на любой слой нашего расслоения являющаяся евклидовой структурой.

Предложение 1. *Если база векторного расслоения — клеточное пространство, то на этом расслоении можно ввести евклидову структуру.*

Более того, достаточно даже считать, что база — любое паракомпактное пространство, т.е. она удовлетворяет следующему свойству.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическое пространство X паракомпактно, если оно хаусдорфово и в любое его открытое покрытие можно вписать *локально конечное* открытое покрытие.

Примерами паракомпактных пространств являются компактные пространства, подмножества евклидовых пространств (в частности конечномерные многообразия), CW -комплексы.

Такие пространства важны, поскольку на них можно эффективно использовать разбиения единицы. Если дано локально конечное открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства X , то подчиненным ему разбиением единицы называется набор непрерывных функций $f_\alpha : X \rightarrow \mathbf{R}$, обладающих следующими свойствами: они принимают только неотрицательные значения, f_α тождественно равна нулю вне U_α и $\sum f_\alpha \equiv 1$. Последняя сумма всюду имеет смысл в силу условия локальной конечности.

Такое разбиение всегда существует; более того, если наше паракомпактное пространство является гладким многообразием, то его можно реализовать гладкими же функциями f_α .

С помощью этих понятий можно построить евклидову структуру на векторном расслоении с клеточной базой.

Покроем базу окрестностями, над которыми расслоение тривиализуется, причем можно считать что это покрытие — локально конечно, и определим разбиение единицы $\{f_\alpha\}$, подчиненное этому покрытию.

Пользуясь локальной тривиальностью, над каждой координатной окрестностью введем евклидову структуру η_α , поднимем функцию f_α до функции f_α^* на пространстве расслоения и рассмотрим функцию $\sum f_\alpha^* \eta_\alpha$. Это и есть требуемая евклидова структура. (Здесь использовано то, что множество всех положительно определенных квадратичных форм на линейном пространстве выпукло.)

Используя евклидову структуру, всегда можно заменять факторрасслоение E/E' на изоморфное ему подрасслоение $E'' \subset E$, слои которого — это ортогональные дополнения к слоям E' в соответствующих слоях E .

3'. Если существует k всюду линейно независимых сечений, то $w_n = 0$, $w_{n-1} = 0, \dots, w_{n-k+1} = 0$. Действительно, расслоение распадается на k -мерное тривиальное расслоение и его $(n-k)$ -мерное дополнение.

Это дает способ вычисления классов Штифеля — Уитни с помощью сечений. Пусть есть гладкое компактное многообразие M^n и гладкое расслоение над ним. Возьмем k сечений общего положения. Рассмотрим в M^n те точки, где эти сечения линейно зависимы. Это множество будет $(k-1)$ -мерным подмножеством в M^n (вообще говоря, с особенностями). Для этого множества корректно определен двойственный по Пуанкаре класс когомологий — индекс пересечения с этим подмножеством. Это как раз и есть $(n-k+1)$ -й класс Штифеля — Уитни.

Еще одно, более общее, описание классов Штифеля—Уитни над “почти любой” базой дается с помощью ассоциированного расслоения реперов.

Пусть $V(n, k)$ — многообразие Штифеля, т.е. множество независимых k -реперов в $\mathbf{R}^n$. Для n -мерного векторного расслоения можно построить ассоциированное расслоение с той же базой и слоем $V(n, k)$. А именно, для каждого слоя рассмотрим множество k -реперов в этом слое.

Для исходного векторного расслоения существует k линейно независимых сечений тогда и только тогда, когда существует одно сечение ассоциированного расслоения Штифеля. Первое препятствие к построению этого сечения — элемент $H^{x+1}(B, \pi_x(V(n, k)))$, где x — размерность первой нетривиальной гомотопической группы $V(n, k)$.

Лемма 1. $\pi_i(V(n, k)) = 0$ при $i < n - k$.

Группа $\pi_{n-k}(V(n, k))$ изоморфна $\mathbf{Z}$, если $k = 1$ или $n - k$. В остальных случаях $\pi_{n-k}(V(n, k)) \simeq \mathbf{Z}_2$.

Таким образом, $x = n - k$ и препятствие лежит в $H^{n-k+1}(B, \{\pi_{n-k}(V(n, k))\})$. Если группа $\pi_{n-k}(V(n, k))$ изоморфна $\mathbf{Z}_2$, то соответствующая локальная система тривиальна и изоморфна $\mathbf{Z}_2$, так что мы получаем некоторый элемент группы $H^{n-k+1}(B, \mathbf{Z}_2)$. Это — в точности класс Штифеля — Уитни. Если же $\pi_{n-k}(V(n, k))$ изоморфна $\mathbf{Z}$, то можно, конечно, слегка помучиться, рассматривая когомологии с коэффициентами в вообще говоря нетривиальной локальной системе. Однако обычно этим занимаются лишь при $k = 1$ (исследуя эйлеров класс). При общих же k вместо этого слой $\mathbf{Z}$ нашей локальной системы приводится по модулю двойки, после чего она вновь становится тривиальной, и соответствующий характеристический класс расслоения реперов (приведенный, строго говоря, по модулю двойки) — это снова класс Штифеля — Уитни.

Наконец, еще одно свойство классов Штифеля–Уитни.

4. Векторное расслоение ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1 = 0$.

1.1. Грассманианы и тавтологические расслоения. На прошлой лекции мы говорили о векторных расслоениях и о характеристических классах Штифеля — Уитни.

Среди всех векторных расслоений фиксированной размерности k есть самое важное — *универсальное* или *тавтологическое* расслоение. Характеристические классы естественно возникают при изучении его базы.

Напомним, что грассманово многообразие $G_k(\mathbf{R}^N)$ — это множество k -мерных подпространств в $\mathbf{R}^N$. Оно является гладким многообразием размерности $k(N - k)$. Вложения $\mathbf{R}^N \subset \mathbf{R}^{N+1} \subset \dots \subset \mathbf{R}^\infty$ задают вложения соответствующих грассманианов

$$(1) \quad G_k(\mathbf{R}^N) \subset G_k(\mathbf{R}^{N+1}) \subset \dots$$

Бесконечномерное многообразие Грассмана $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ — это объединение грассманианов $G_k(\mathbf{R}^N)$, $N \rightarrow \infty$, снабженное топологией прямого предела. На многообразии $G_k(\mathbf{R}^N)$ имеется стандартная клеточная структура: две его точки принадлежат одной и той же *клетке Шуберта*, если соответствующие k -мерные плоскости имеют одинаковые размерности пересечений со всеми подпространствами $\mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^2 \subset \dots$ нашей последовательности вложенных подпространств. Эти клетки задают клеточное разбиение пространств $G_k(\mathbf{R}^N)$ для всех $N \geq k$ сразу, и на $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ тоже возникает структура клеточного пространства.

Над многообразием $G_k(\mathbf{R}^N)$ имеется *тавтологическое* k -мерное векторное расслоение. А именно, пространство расслоения состоит из таких пар $\{x, a\} \in \mathbf{R}^N \times G_k(\mathbf{R}^N)$, что $x \in a$ (здесь a — подпространство в $\mathbf{R}^N$ размерности k , а x — точка в $\mathbf{R}^N$). Расслоение — проекция на второе слагаемое.

Вложения грассманианов (1) поднимаются до вложений пространств тавтологических расслоений над ними; объединение их определяет стабильное тавтологическое расслоение над $G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Теорема 1. Кольцо $H^*(G_k(\mathbf{R}^\infty), \mathbf{Z}_2)$ изоморфно кольцу $\mathbf{Z}_2[w_1, \dots, w_k]$ полиномов от некоторых классов w_i , $i = 0, 1, \dots, k$, называемых универсальными классами Штифеля — Уитни.

Их можно рассматривать также как классы Штифеля–Уитни тавтологического расслоения над $G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Это кольцо когомологий важно потому, что все остальные k -мерные векторные расслоения сводятся к тавтологическому расслоению над $G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Теорема 2. *а) Любое k -мерное векторное расслоение над компактной базой B эквивалентно расслоению, индуцированному из тавтологического расслоения над $G_k(\mathbf{R}^N)$ с достаточно большим N при некотором отображении $B \rightarrow G_k(\mathbf{R}^N)$.*

а') Любое k -мерное векторное расслоение над клеточной базой B эквивалентно расслоению, индуцированному из тавтологического расслоения над $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ при некотором отображении $B \rightarrow G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

б) Если два k -мерных векторных расслоения над одной компактной базой эквивалентны, то соответствующие им отображения базы в $G_k(\mathbf{R}^N)$ гомотопны в некотором грассманиане $G_k(\mathbf{R}^L)$, где $L \geq N$. (Введение $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ позволяет не говорить каждый раз о пространстве большей размерности.)

б') Если два k -мерных векторных расслоения над одной клеточной базой эквивалентны, то соответствующие им отображения базы в $G_k(\mathbf{R}^\infty)$ гомотопны.

Таким образом, k -мерные векторные расслоения над B , рассматриваемые с точностью до эквивалентности, находятся во взаимно однозначном соответствии с классами непрерывных отображений B в $G_k(\mathbf{R}^\infty)$, рассматриваемых с точностью до гомотопической эквивалентности. Иными словами, множество k -мерных векторных расслоений над B (рассматриваемых с точностью до эквивалентности) находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $[B, G_k(\mathbf{R}^\infty)]$ гомотопических классов отображений в $G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Набросок доказательства. Вся содержательная часть этого утверждения относится к конечномерному случаю. Дальше просто делается переход к пределу.

Нам нужно сконструировать послойное отображение нашего расслоения $p : E \rightarrow B$ в тавтологическое расслоение над $G_k(\mathbf{R}^\infty)$, т.е. включить их в коммутативную диаграмму отображений

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbf{R}^N \times G_k(\mathbf{R}^N) \\ \downarrow p & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\phi} & G_k(\mathbf{R}^N) \end{array}$$

такую что для любого $b \in B$ слой $p^{-1}(b)$ изоморфно отображается на k -мерную плоскость в $\mathbf{R}^N$, соответствующую точке $\phi(b) \in G_k(\mathbf{R}^\infty)$.

Если база B компактна, то у нее есть покрытие m окрестностями, над каждой из которых расслоение тривиально. Тогда можно взять $N = m \times k$. Действительно, рассмотрим в $\mathbf{R}^N$ набор координат

$$x_1^1, \dots, x_1^k, x_2^1, \dots, x_2^k, \dots, x_m^1, \dots, x_m^k.$$

Для первой окрестности $U_1 \subset B$ возьмем ее полный прообраз $p^{-1}(U_1) \simeq \mathbf{R}^k \times U_1$ и зададим его отображение $\lambda_1 : p^{-1}(U_1) \rightarrow \mathbf{R}^N$, отождествляя каждый экземпляр слоя $\mathbf{R}^k$ с координатной плоскостью, натянутой на первые k координат; вне окрестности отображение тождественно равно нулю. Для прообраза второй окрестности рассматриваем отображение λ_2 на координатную плоскость, натянутую на вторые k координат, и т.д. Затем с помощью разбиения единицы на B (которое можно, конечно, поднять на E) из этих разрывных отображений

получаем непрерывное отображение $E \rightarrow \mathbf{R}^\infty$. Для каждого слоя расслоения p хотя бы одна из функций, входящих в определение разбиения единицы, ненулевая, поэтому каждый слой изоморфно отображается на некоторое k -мерное подпространство.

Докажем теперь обратное утверждение. Если есть два послойных изоморфизма и если размерность пространства $\mathbf{R}^N$ достаточно велика, то ничто не мешает прогомоторировать друг в друга соответствующие отображения $E \rightarrow \mathbf{R}^N$ в пространстве отображений, ограничения которых на любой слой являются линейными. Действительно, для любой точки $b \in B$ пространство линейных отображений $p^{-1}(b) \rightarrow \mathbf{R}^N$ стягиваемо.

В процессе гомотопирования можно наткнуться на дискриминант, то есть множество таких отображений, что хотя бы для одного $b \in B$ отображение соответствующего слоя в $\mathbf{R}^N$ имеет ранг, меньший k .

Но коразмерность множества вырожденных отображений $\mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^N$ в пространстве всех линейных отображений равна $N - k + 1$. Поэтому если $N \gg k + \dim B$, то по теореме трансверсальности гомотопия общего положения не задевает дискриминант, и наша гомотопия между отображениями $E \rightarrow \mathbf{R}^N$ продолжается до гомотопии между соответствующими послойными отображениями (2). Это — доказательство для компактной базы.

Расслоению $E \rightarrow B$ соответствует набор классов когомологий $w_1(E), \dots, w_k(E) \in H^*(B, \mathbf{Z}_2)$, а именно, — образы $w_1, \dots, w_k$ при индуцированном отображении $H^*(G_k(\mathbf{R}^\infty), \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^*(B, \mathbf{Z}_2)$. Гомотопные отображения баз определяют одинаковые отображения когомологий, следовательно эти классы определены однозначно.

На прошлой лекции шла речь о свойствах классов Штифеля — Уитни. Естественность следует из того, что операция индуцирования классов когомологий функториальна.

Формула Уитни не столь тавтологична. Это — нетривиальный факт про гомологии пространства Грассмана. Имеется важное вложение

$$(3) \quad G_k(\mathbf{R}^\infty) \times G_m(\mathbf{R}^\infty) \rightarrow G_{k+m}(\mathbf{R}^\infty).$$

Определим его для конечномерных грассмановых пространств. Если $V^k \subset \mathbf{R}^N$ и $V^m \subset \mathbf{R}^N$, то $V^k \oplus V^m$ — подпространство в $\mathbf{R}^{2N}$. Таким образом получаются вложения $G_k(\mathbf{R}^N) \times G_m(\mathbf{R}^N) \rightarrow G_{k+m}(\mathbf{R}^{2N})$. Вложение (3) получается из них предельным переходом.

При прямом произведении когомологии тензорно перемножаются. Поэтому возникает индуцированное отображение

$$\mathbf{Z}_2[w'_1, \dots, w'_k] \otimes \mathbf{Z}_2[w''_1, \dots, w''_m] \leftarrow \mathbf{Z}_2[w_1, \dots, w_{m+k}],$$

где w'_i порождают когомологии $G_k(\mathbf{R}^\infty)$, а w''_i когомологии $G_m(\mathbf{R}^\infty)$. Это отображение кольцевое. Поэтому достаточно описать его на мультипликативных образующих. Формула Уитни заключается в том, что они отображаются так:

$$w_i \mapsto w'_i + w'_{i-1}w''_1 + \dots + w'_i w''_{i-1} + w''_i.$$

Есть еще категория ориентированных векторных расслоений. Можно рассмотреть множество ориентированных k -мерных подпространств в $\mathbf{R}^N$. Его обозначают $G_k^+(\mathbf{R}^N)$.

Теорема 3. $H^*(G_n^+(\mathbf{R}^\infty), \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[w_2, \dots, w_n]$.

Для ориентированных расслоений первый класс Штифеля — Уитни пропадает.

Для накрытия $G_k^+ \rightarrow G_k$ индуцированное отображение имеет ядро, натянутое на w_1 , а остальные образующие отображаются друг на друга.

2. КЛАССЫ, ДВОЙСТВЕННЫЕ ОСОБЕННОСТЯМ

Пусть M^m — m -мерное гладкое многообразие. Для отображения $M^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ можно рассмотреть множество его особых (в том или ином смысле) точек. Например, если мы занимаемся задачей о существовании иммерсии $M^m \rightarrow \mathbf{R}^n$, то особыми точками естественно считать те точки, в которых вырождается дифференциал отображения. Если мы занимаемся задачей о существовании вложения, то особыми естественно считать еще и двойные точки (т.е. точки M^m , образы которых совпадают с образами других точек). Существуют и более тонкие задачи о существовании отображений, вообще говоря имеющих особые точки, но не слишком сложные (например, отображения $M^m \rightarrow \mathbf{R}^n$, у которых ранг дифференциала может падать не более чем на k , или имеющие самопересечения кратности не выше k).

Рассмотрим замыкание множества особых точек. В случае отображения общего положения это множество в каждой окрестности объемлемо диффеоморфно алгебраическому множеству. Для такого множества всегда существует триангуляция. У такой триангуляции объединение клеток старшей размерности является циклом (быть может неориентированным): чтобы убедиться в этом, можно рассмотреть трансверсальный срез к любому симплексу, размерность которого на 1 меньше максимальной. В этом срезе пересечение с максимальными симплексами будет образовывать алгебраическую кривую, у которой в каждую точку входит четное число ветвей. Значит, существует класс когомологий (по крайней мере с коэффициентами в $\mathbf{Z}_2$), двойственный по Пуанкаре этому множеству. Он сохраняется при деформациях нашего отображения. В частности, если для какого-то отображения общего положения получается ненулевой класс когомологий, то и для любого отображения общего положения получается ненулевой класс когомологий. Этим свойством можно воспользоваться для построения препятствий к существованию иммерсий и вложений: если класс когомологий, двойственный замыканию множества особых точек какого-то отображения отличен от нуля, то аналогичное множество для любого другого отображения не может быть пустым.

Аналогично можно рассмотреть особенности отображения M^m в произвольное многообразие N^n и построить класс когомологий, двойственный этому множеству. Этот класс является препятствием к существованию неособого отображения в *той же гомотопическом классе*.

Часто оказывается, что если такой препятствующий класс когомологий нулевой, то действительно существует отображение, для которого множество особенностей пусто.

Вместо того чтобы рассматривать все особые точки, можно рассматривать лишь те особые точки, в которых происходит что-то более сложное, т.е. рассматривать особенности какого-то специального типа. В таком случае тоже можно определить двойственный класс когомологий. Так иногда удается построить дополнительное препятствие, например, к существованию иммерсии.

Действительно, может оказаться, что множество всех особых точек определяет нулевой класс когомологий, и значит не позволяет доказать отсутствие иммерсий. Но может быть множество особых точек, в которых ранг дифференциала падает на 2, уже гомологически нетривиально и все-таки дает такое доказательство.

3. ИСЧИСЛЕНИЕ СТРУЙ

Прежде чем двигаться дальше, нам придется навести некоторый порядок с объектами и словами, которые в этом участвуют. Например, какой точный смысл имеют слова “тип особенностей” или “отображение общего положения”. Это делается с помощью следующей философии.

Пусть M, N — гладкие многообразия, и $f : M \rightarrow N$ — гладкое отображение (т.е. непрерывно дифференцируемое столько раз, сколько нужно). Зафиксируем точку $x \in M$ и рассмотрим другое гладкое отображение $g : M \rightarrow N$. Говорят, что f и g имеют одну k -струю в точке x , если в окрестности этой точки отображения f и g отличаются на малую более высокого порядка, чем k , т.е. $f(x) = g(x)$ и

$$\|f(x') - g(x')\| = O(\|x' - x\|^{k+1}).$$

Иными словами, если фиксировать локальные системы координат в окрестностях точек x и $f(x)$, то начальные отрезки рядов Тэйлора (от степени 0 до степени k) должны совпадать, т.е. все частные производные до порядка k должны совпадать. Очевидно, принадлежность к одной k -струе есть отношение эквивалентности на множестве гладких отображений $M \rightarrow N$.

k -струя — это класс эквивалентности относительно этого отношения эквивалентности.

Задача 1. Какова размерность пространства струй отображений M в N , переводящих x в y ?

Если N — линейное пространство, то струи можно складывать (функции можно складывать, отношение эквивалентности сохраняется).

Введем следующие обозначения:

$J_x^k(M, N)$ — пространство всех k -струй в точке $x \in M$;

$J^k(M, N)$ — пространство вообще всех k -струй.

Возникает расслоение $J^k(M, N) \rightarrow M$ со слоем $J_x^k(M, N)$.

Задача 2. Что такое $J^0(M, N)$ и $J^1(M, N)$?

Если M и N — гладкие многообразия, то и $J^k(M, N)$ — гладкое многообразие. Действительно, если M и N — координатные линейные пространства, $M = \mathbf{R}^m$, $N = \mathbf{R}^n$, то имеется очевидное отождествление $J^k(M, N) = M \times$ (пространство наборов из n полиномов степени $\leq k$ от m переменных). Это — линейное пространство, в частности гладкое многообразие. Далее, пусть M и N произвольны, а U и V — две координатные окрестности в M и N . Рассмотрим в $J^k(M, N)$ подмножество (U, V) , состоящее из струй отображений, приложенных в точках $x \in U$ и отображающих эти точки в V . Системы координат в U и V отождествляют такое подмножество с некоторым открытым подмножеством в линейном пространстве $J^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, то есть превращают его в открытую карту. Такие подмножества (U, V) , соответствующие разным U и

V , определяют покрытие $J^k(M, N)$. На пересечении разных таких множеств (U_i, V_i) и (U_j, V_j) функции перехода между стандартными координатами соответствующих карт гладко выражаются через частные производные функций перехода локальных систем координат на M и N в $U_i \cap U_j$ и $V_i \cap V_j$ соответственно. Следовательно, эта система карт (U, V) задает гладкий атлас на множестве $J^k(M, N)$, превращая его в гладкое многообразие.

В частности, в $J^k(M, N)$ определена стандартная топология.

Всегда имеется последовательность расслоений

$$\dots \rightarrow J^k(M, N) \rightarrow J^{k-1}(M, N) \rightarrow \dots$$

Если N — линейное пространство, то все эти расслоения векторные.

Струйное расширение. Пусть $f : M \rightarrow N$, $f \in C^k(M, N)$. Отображение f естественным образом определяет сечение расслоения $J^k(M, N) \rightarrow M$: любой точке $x \in M$ сопоставляется k -струя отображения f в точке x . Это сечение называют k -струйным расширением отображения f и обозначают так: $j^k(f)$. Например, 0-струйное расширение f — это график f .

Топология Уитни. Топологию в пространстве $C^k(M, N)$ можно ввести разными способами. Для многих целей бывает удобна следующая топология, введенная Уитни.

Пусть $W \subset J^k(M, N)$ — открытое подмножество. Ему можно сопоставить множество $\{W\} \subset C^k(M, N)$, состоящее из тех отображений, образы k -струйных расширений которых лежат в W . Чтобы $\{W\}$ было непусто, W должно удовлетворять сильным ограничениям. Например, проекция W на M должна совпадать с M .

Топология Уитни в $C^k(M, N)$ — это топология, база которой состоит из всевозможных областей вида $\{W\}$.

Эти понятия нам нужны для того, чтобы правильно сформулировать понятие отображения *общего положения* или, как еще говорят, *типичного отображения*. Вот еще одно необходимое понятие.

Трансверсальность. Пусть K и L — подмногообразия в N . Они называются *трансверсальными* в точке $x \in N$, если выполнено одно из двух:

- 1) одно из них не проходит через x ,
- 2) они оба проходят через x и тогда

$$T_x K + T_x L = T_x N,$$

то есть касательное пространство к N в точке x является линейной оболочкой своих подпространств $T_x K$ и $T_x L$.

Подмногообразия K и L называются трансверсальными, если они трансверсальны в любой точке $x \in N$.

Есть и другие понятия трансверсальности. Пусть, например, $\varphi : K \rightarrow N$ и $\psi : L \rightarrow N$ — два отображения. Отображения φ и ψ называются трансверсальными в точке $(x, y) \in K \times L$, если либо $\varphi(x) \neq \psi(y)$, либо $\varphi(x) = \psi(y)$ и пространства $D\varphi(T_x K)$ и $D\psi(T_y L)$ — образы касательных пространств к K и L под действием дифференциалов отображений φ и ψ — порождают всё пространство $T_{\varphi(x)} N$.

Отображения φ и ψ называются трансверсальными, если они трансверсальны в любой точке $(x, y) \in K \times L$.

Например, трансверсальность подмногообразий в смысле предыдущего определения эквивалентна трансверсальности их тождественных вложений.

Если $\dim K + \dim L < \dim N$, то отображения ϕ и ψ трансверсальны тогда и только тогда, когда $\phi(K)$ не пересекается с $\psi(L)$.

Промежуточный вариант понятия трансверсальности: пусть L — подмногообразие в N и $\varphi : K \rightarrow N$ — гладкое отображение. Тогда φ трансверсально подмногообразию L , если φ и тождественное вложение L в N трансверсальны в смысле предыдущего определения.

Слабая теорема трансверсальности. Пусть в многообразии N есть замкнутое подмногообразие L . Рассмотрим всевозможные отображения $\varphi : K \rightarrow N$. Тогда в любом пространстве $C^k(K, N)$, $k \geq 1$, отображения φ , трансверсальные к подмногообразию L , образуют плотное (в смысле топологии Уитни) подмножество.

Утверждение о плотности можно усилить: если K компактно, то это подмножество будет не только плотным, но и открытым. А если K произвольное, то это подмножество является не более чем счетным пересечением открытых плотных подмножеств (в частности, оно плотно).

Эта теорема достаточно простая.

Сильная теорема трансверсальности, или теорема трансверсальности Тома. Пусть в многообразии $J^k(M, N)$ есть гладкое замкнутое подмногообразие L . Тогда в любом пространстве $C^r(K, N)$, где $r > k$, отображения $\varphi : M \rightarrow N$, k -струйные расширения $j^k(\varphi)$ которых трансверсальны подмногообразию L , образуют плотное подмножество.

Утверждение о плотности снова можно усилить: если K компактно, то это подмножество будет не только плотным, но и открытым. А если K произвольное, то это подмножество является не более чем счетным пересечением открытых плотных подмножеств.

Применим это к какой-нибудь известной ситуации. Пусть, например, $N = \mathbf{R}$ и подмножество $L \subset J^2(M^m, \mathbf{R})$ состоит из всевозможных неморсовских 2-струй. (Функция f неморсовская в точке x , если $df_x = 0$ и матрица Гессе $Hess_x(f) \equiv \{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\}$ вырождена, то есть имеет нулевой определитель.)

Коразмерность L равна $m + 1$. Поэтому из теоремы трансверсальности, вроде бы, следует, что почти все функции морсовские: действительно, условие, что функция морсовская, эквивалентно тому, что ее 2-струйное расширение не пересекает множества L или, что то же самое, трансверсально к L . Это рассуждение не вполне корректно: множество L не гладкое, так как условие $\det Hess_x(f) = 0$ не гладкое: множество вырожденных квадратичных форм имеет особые точки, соответствующие формам, ранг которых падает больше чем на 1. Но это поправимо, потому что у теоремы трансверсальности есть стратифицированный вариант.

Стратифицированные множества. Типичными представителями стратифицированных множеств являются конус (с особой точкой в вершине), полукубическая парабола (кривая с особой точкой — точкой возврата), *ласточкин хвост* (фигура на Рис. 4 в книге Арнольд, Васильев, Горюнов, Ляшко; Особенности-I, М.: ВИНТИ, т.6, 1988 или Рис. 27 в книге Арнольд, Варченко, Гусейн-Заде,

Особенности дифференцируемых отображений, Москва, Наука, 1982) и *зонтик Уитни* (фигура там же соответственно на рисунках 41 и 19). Их полезно иметь в виду, когда речь идет о стратифицированных множествах.

Пусть есть гладкое многообразие T и в нем некоторое подмногообразие A . *Предварительная*, или *первичная* стратификация множества A — это его разбиение на подмногообразия A_i , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) разбиение локально конечно;
- 2) все A_i — гладкие линейно связные подмногообразия (вообще говоря разных размерностей);
- 3) замыкание любого страта A_i — объединение нескольких стратов, т.е. граница любого страта — объединение конечного числа стратов строго меньшей размерности. (Обозначение: $A_i \succ A_j$, если страт A_j лежит в замыкании страта A_i).

Для полноценной работы с теоремой трансверсальности этих условий не достаточно. Нужно еще дополнительно наложить некоторые условия на касательные пространства примыкающих стратов, точнее, на соотношение между касательным пространством в каждой точке y меньшего страта и предельным поведением касательных пространств к большему, взятых в любой последовательности его точек x_i , стремящихся к этой точке y . Об этих условиях — *условиях Уитни* — мы поговорим на следующей лекции. Первичная стратификация, удовлетворяющая этим условиям, называется *регулярной стратификацией* или *стратификацией Уитни*.

Еще одно часто встречающееся множество, являющееся стандартным примером стратифицированного множества, таково.

Зонтиком Уитни называют поверхность в трехмерном пространстве, заданную уравнением $x^2 = zy^2$. В своей основной части (лежащей в полупространстве $z \geq 0$) она двумерна, но имеет еще “ручку” — полупрямую $\{z < 0, x = y = 0\}$, являющуюся продолжением линии самопересечения ее двумерной части. Это множество можно естественным образом стратифицировать: у него есть по 2 страта размерностей 1 и 2 и еще 1 страт размерности 0.

Зонтик Уитни столь же естественно возникает в теории *результантных множеств*, как ласточкин хвост возникает в теории дискриминантов. А именно, ласточкин хвост возникает в результате понижения размерности множества $\Sigma_2 \subset \{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d\}$ с помощью факторизации по действию группы сдвигов аргумента. Если же мы рассмотрим пространство $\mathbf{R}^4$ пар вещественных квадратных трехчленов $x^2 + \alpha x + \beta$ и $x^2 + \gamma x + \delta$, и в нем подмногообразие Σ , состоящее из пар трехчленов, имеющих общий корень, и снова понизим размерность пары $(\mathbf{R}^4, \Sigma)$ с помощью группы сдвигов аргументов, то получим пару $(\mathbf{R}^3, \text{зонтик Уитни})$. При этом ручка зонтика соответствует таким парам полиномов, которые имеют общие невещественные корни, а линия самопересечения — таким, у которых есть пара вещественных совпадающих корней.

Если есть стратифицированное множество, то можно определить трансверсальность к стратифицированному множеству как трансверсальность ко всем его стратам. Все теоремы трансверсальности останутся при этом верными.

Классификация особенностей. Простейшая классификация особенностей — по рангу дифференциала (или, в координатной записи, матрицы Якоби).

Дифференцируемое отображение $f : M^m \rightarrow N^n$ определяет для любой точки $x \in M^m$ линейное отображение $df : T_x M^m \rightarrow T_{f(x)} N^n$. Точка x — *неособая* для f , если ранг этого отображения равен $\min(m, n)$, в противном случае f имеет особенность в точке x .

Далее, f имеет в точке x особенность типа Σ^i если i — размерность ядра отображения $df|_x$. Если в локальных координатах вблизи точек x и $f(x)$ отображение f задано набором функций $y_j = f_j(x_l)$, $j = 1, \dots, n$, $l = 1, \dots, m$, то i — это размерность ядра матрицы Якоби $\left\{ \frac{\partial f_j}{\partial x_l} \right\}$, однако легко видеть, что она не зависит от выбора этих локальных координат.

Принадлежность особенности классу Σ^i полностью определяется 1-струей функции (отображения) f .

Бывают особенности, принадлежащие одному классу Σ^i , но не эквивалентные. Простейший пример дают отображения $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ и класс Σ^1 . Начнем с отображений $\mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$. Простейшая особенность имеет вид $y = x^2$. Можно сделать так называемую стабилизацию этой особенности и получить особенность $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2$ (в n -мерном случае получаем $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$). Такую особенность (а также все особенности, сводящиеся к ним подходящим выбором локальных координат) называют особенностями типа складки. См. рис. 1 на последней странице этой лекции.

Точки складки образуют гиперповерхность в M^m , а их образ в N^n — локально гладкую (но может быть самопересекающуюся) гиперповерхность в N^n . Складка — устойчивая особенность; она не устраняется малым шевелением отображения (в отличие, например, от особенности функции $f = x^3$, которая убивается сколь угодно малым локальным шевелением, заменяющим x^3 на $x^3 + \epsilon x$). Это означает, что при малом шевелении f вблизи любой точки складки старого отображения найдется точка складки нового.

Есть еще одна неустранимая устойчивая особенность отображений $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, обнаруженная Уитни. Эту особенность называют сборка. Точки сборки образуют множество коразмерности 2.

В локальных координатах оно задается в виде

$$(4) \quad \begin{cases} y_1 &= x_1^3 + x_1 x_2 \\ y_2 &= x_2 \end{cases}$$

Сборку удобно рассматривать как 1-параметрическое семейство функций $\mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ от переменной x_1 (зависящих от параметра $x_2 = y_2$), претерпевающих морсовскую перестройку рождения–уничтожения.

Имеются и “многомерные” сборки отображений $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ с любым $n \geq 2$, их явная локальная запись получается из (4) приписыванием $n - 2$ “слепых” уравнений $y_l = x_l$, $l = 3, \dots, n$.

Вблизи особой точки типа сборки множество всех особых точек гладкое (в отличие от его проекции, которая имеет точку возврата). Почти все точки этого множества — точки складки. Но одна особая точка $(0, 0)$ имеет более сложную структуру.

Имеется инвариант, позволяющий отличить точку сборки от точки складки. Мы рассматривали класс Σ^1 (к которому очевидно принадлежат точки обоих этих типов). Более общим образом, рассмотрим у нашего отображения множество всех особых точек класса Σ^i , $i = 1, \dots, m$. Для любого i и отображения общего положения множество всех точек, где ядро дифференциала i -мерно,

является гладким подмногообразием в M^m . (Его замыкание не обязательно гладко, потому что ему уже принадлежат точки класса Σ^{i+1} , в окрестности которых это замыкание имеет конические особенности.) Рассмотрим теперь ограничение f на множество точек класса Σ^1 . Для складки полученное отображение будет неособым. А для сборки ограничение f на особое множество имеет особенность. Поэтому сборка не эквивалентна складке.

В связи с этим говорят, что особенности типа сборки принадлежат классу $\Sigma^{1,1}$: вторая единица — это размерность ядра дифференциала ограничения f на множество точек, в которых ядро исходного отображения $f(M^m)$ 1-мерно.

Вообще, *символом Тома–Бордмана* особенностей отображений m -мерных многообразий в n -мерные называется произвольная конечная последовательность $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, где $m \geq i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq 0$. Коль скоро она зафиксирована, можно рассмотреть множество особых точек следующего вида. Сначала берем особые точки, в которых ядро дифференциала i_1 -мерно. Если наше отображение — общего положения, то такие точки образуют гладкое подмногообразие $\{\Sigma^{i_1}\} \subset M^m$.

(ЗАДАЧА: пользуясь теоремой трансверсальности Тома найти коразмерность этого подмногообразия.)

Ограничиваем на него наше отображение и рассматриваем особенности полученного отображения $f|_{\Sigma^{i_1}}$, в которых размерность его ядра равна i_2 . Снова в случае общего положения получаем гладкое многообразие, и т.д.

Но и эта классификация тоже неполная: случается, что две особые точки принадлежат одному классу Тома–Бордмана, но не эквивалентны, то есть ни при каком выборе локальных координат не записываются одинаковыми формулами. Правда, так бывает только если $i_1 > 1$: все особенности одного и того же класса $\Sigma^{1, \dots, 1, 0}$ эквивалентны друг другу.

Для любого класса Тома–Бордмана Σ^I , $I = (i_1, i_2, \dots)$, и любого отображения $f: M^m \rightarrow N^n$ общего положения, замыкание множества таких особых точек в M^m локально гомеоморфно алгебраическому множеству, а следовательно можно определить класс когомологий, двойственный по Пуанкаре этому множеству. Имеются в виду когомологии по модулю 2, потому что для вещественного алгебраического множества фундаментальный класс (то есть гомологический класс суммы его симплексов максимальной размерности) наверняка определен только по модулю 2. Для символа Тома–Бордмана $I = (i_1, i_2, \dots, 0)$ можно определить класс когомологий $\omega(I) \in H^*(M, \mathbf{Z}_2)$. Он лежит в размерности, равной коразмерности множества особых точек этого типа. (Явная формула для этой коразмерности довольно сложна, см. книгу Арнольд, Варченко, Гусейн-Заде, Особенности дифференцируемых отображений, Москва, Наука, 1982.)

Например, при $m < n$ и $I = (1, 0)$ для отображений $M^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ двойственный класс когомологий к множеству $\Sigma^{1,0}$ — это $(n-m+1)$ -мерный класс Штифеля–Уитни, т.е. $\omega(1) = w_{n-m+1}(M)$.

Может случиться так, что двойственный класс для Σ^1 равен нулю, а двойственный класс для Σ^2 не равен нулю. Это позволяет строить дополнительные препятствия. Для отображений $M^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ коразмерность особых точек класса Σ^2 в общем положении равна 4. Двойственный класс в этом случае определен даже по модулю целых чисел. Этот класс — *первый класс Понтрягина* многообразия M^n .

Пусть задан какой-то символ Тома–Бордмана. Рассмотрим отображение $f : M^m \rightarrow N^n$ общего положения и соответствующий этому символу двойственный класс когомологий. Оказывается, что этот класс можно выразить через стандартные характеристические классы посредством так называемого полинома Тома.

В кольце когомологий M лежат классы Штифеля–Уитни $w_1(M), \dots, w_m(M)$ и прообразы аналогичных классов $f^*(w_1(N)), \dots, f^*(w_m(N))$. Определим класс $W(f) \in H^*(M, \mathbf{Z}_2)$ формулой

$$W(f) = \frac{1 + w_1(M) + \dots + w_m(M)}{1 + f^*(w_1(N)) + \dots + f^*(w_m(N))}$$

(деление определено однозначно). Этот класс распадается в сумму $1 + W_1(f) + \dots + W_m(f)$, $W_k(f) \in H^k(M, \mathbf{Z}_2)$.

Теорема 4 (Том). *Для любого заданного класса Тома–Бордмана I и чисел m и n существует такой универсальный полином $P_I(W_1, \dots, W_m)$, что $\forall M^m$ (компактного), $\forall N^n$, $\forall f : M^m \rightarrow N^n$ общего положения*

$$\omega(I) = P_I(W_1(f), \dots, W_m(f)).$$

Есть много работ, в которых вычисляются эти многочлены Тома для некоторых классов особенностей. Для Σ^i это делается просто, (явную формулу, принадлежащую Портеусу, см. § IV.1 в книге Арнольд, Васильев, Горюнов, Ляшко; Особенности-I, М.: ВИНТИ, т.6, 1988); для $\Sigma^{i,j}$ это сделать можно, а дальше все гораздо труднее. Впрочем, со времени публикации этой книги в этой науке произошел значительный прогресс, прежде всего усилиями Максима Казаряна и R.Rimanyi.

В теореме Тома можно вместо классов Тома–Бордмана взять любые классы особенностей. Под классом особенностей подразумевается следующее. Для некоторого k рассмотрим множество всех k -струй $J^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ и в нем рассмотрим подмножество $A \subset J^k(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$, обладающее такими двумя свойствами:

- 1) A — алгебраическое множество;
- 2) A инвариантно относительно замен координат в образе и прообразе.

Тогда A — *класс особенностей*. Если имеется отображение $f : M^m \rightarrow N^n$, то для любой точки можно сказать, имеет ли f в ней особенность типа A : для этого нужно ввести в окрестности точек x и $f(x)$ локальные координаты (отождествляющие эти окрестности с $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$) и посмотреть, попадает ли при этом отождествлении k -струя f в множество A . Из условия 2) следует, что ответ не зависит от выбора локальных координат, а благодаря условию 1) для отображения общего положения можно определить двойственный класс когомологий в $H^*(M, \mathbf{Z}_2)$. “Общность положения” здесь означает следующее. Класс A инвариантно определяет некоторое подмножество в пространстве струй $J^k(M^m, N^n)$, и k -струйное расширение f должно (в соответствии с теоремой трансверсальности Тома) быть трансверсально к этому множеству. (Трансверсальность имеет смысл посложнее: это множество “локально алгебраично” а следовательно допускает стратификацию Уитни.)

Любой класс Тома–Бордмана, соответствующий символу $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$, является классом особенностей в этом общем смысле, причем достаточно взять $k = r$: принадлежность ростка функции к такому классу однозначно распознается по его r -струе.

Для произвольного класса особенностей верен аналог вышеуказанной теоремы Тома, вообще говоря в немного более слабом варианте: существует универсальный полином $P_A(\omega_1, \dots, \omega_m; \tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n)$ такой, что для любого типичного отображения $f : M^m \rightarrow N^n$ класс, двойственный к его особенностям типа A , равен значению этого полинома при подстановке в него всех классов $w_i(M^m)$ и $f^*(w_i(N^n))$, а не частного $W(f)$ составленных из них выражений. Для того, чтобы достаточно было знать только классы $W_i(f)$, класс особенностей A должен удовлетворять еще дополнительным условиям.

Можно рассматривать также задачи такого типа: существует ли иммерсия с особенностями Σ^1 , но без особенностей типа Σ^2 ?

Стратифицированные множества. Теперь мы поговорим подробнее об определении стратифицированного множества.

Пусть есть гладкое многообразие M и в нем некоторое подмножество A . *Регулярная стратификация* множества A — это его разбиение на подмножества A_i , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) разбиение локально конечно;
- 2) все A_i — гладкие линейно связные подмногообразия (разных размерностей);
- 3) замыкание любого страта A_i — объединение нескольких стратов, т.е. граница любого страта — объединение конечного числа стратов строго меньшей размерности.
- 4) касательные пространства правильно ведут себя при примыкании стратов.

Последнее условие строго формулируется разными способами. Один из возможных способов — условие а) Уитни (есть еще условие б) Уитни, более сильное, но на нем мы останавливаться не будем):

пусть есть два примыкающих страта $X \succ Y$ (т.е. Y лежит в границе X) и последовательность точек x_i большего страта, сходящаяся к точке y меньшего страта; пусть существует предел касательных плоскостей к многообразию X в этих точках (плоскости рассматриваются как точки грассманова расслоения $G^{\dim X}(TM)$, ассоциированного с касательным расслоением многообразия M), тогда эта предельная плоскость $L \subset T_y M$ должна содержать касательную плоскость к меньшему страту.

Стратификация, удовлетворяющая всем этим свойствам, называется еще *стратификацией Уитни*. Точная формулировка условия б) нам не понадобится, нам будут полезны только следующие свойства регулярных стратификаций.

Свойства стратифицированных множеств.

Теорема 5. *У любого алгебраического или аналитического подмножества алгебраического или аналитического многообразия существует регулярная стратификация.*

Теорема 6. *Из регулярности стратификации вытекает C^0 -тривиальность вдоль любого страта.*

C^0 -тривиальность вдоль любого страта означает следующее. Возьмем точку страта $Y \subset A$ и рассмотрим ее малую шаровую окрестность U в M . Пусть $T \subset U$ — произвольная *трансверсаль* страта Y , то есть гладкое подмногообразие дополнительной размерности $\dim M - \dim Y$, такое что тройка (U, Y, T)

диффеоморфна тройке $(\mathbf{R}^{\dim M}, \mathbf{R}^{\dim Y}, \mathbf{R}^{\dim T})$, причем два последних подпространства пересекаются трансверсально. Тогда пара $(U, A \cap U)$ гомеоморфна прямому произведению $Y \cap U$ на пару $(T, T \cap A)$. ($T \cap A$ называется еще *трансверсальным срезом* страта Y .)

Теорема 7. *Из C^1 -тривиальности вдоль любого страта следует регулярность стратификации.*

(Определение C^1 -тривиальности получается из определения C^0 -тривиальности, если в нем заменить гомеоморфизм на диффеоморфизм класса C^1 .)

Теорема 8. *Пусть имеется отображение $N \rightarrow M$ и в M есть регулярное стратифицированное подмножество A . Тогда если в окрестности какой-то точки $y \in M$ отображение трансверсально страту, содержащую эту точку, то вблизи этой точки оно трансверсально и всем большим стратам.*

На прошлой лекции было сформулировано несколько теорем трансверсальности. Все эти теоремы дословно переформулируются для стратифицированных множеств. Из этого, например, сразу же получаем, что почти все функции имеют только морсовские особенности. Вот еще одно применение теоремы трансверсальности Тома.

Отображение $f : N \rightarrow M$ называют иммерсией, если его дифференциал $Df : TN \rightarrow TM$ всюду инъективен.

Теорема 9 (Слабая теорема Уитни). *При $m \geq 2n$ почти любое отображение $f : N^n \rightarrow M^m$ является иммерсией.*

Чтобы доказать слабую теорему Уитни, рассмотрим в $J^1(N^n, M^m)$ подмножество, состоящее из 1-струй отображений, дифференциал которых имеет в соответствующих точках неполный ранг. Коразмерность этого подмножества равна $m - n + 1$. (Это достаточно проверять локально, в координатах, и следует из того, что множество матриц $n \times m$ неполного ранга имеет коразмерность $m - n + 1$ в пространстве всех матриц.) Поэтому если $m - n + 1 > n$, то условие трансверсальности 1-струйного расширения к этому подмножеству эквивалентно тому, что оно просто не пересекает этого множества, то есть отображение — иммерсия.

Мультиструйная теорема трансверсальности Тома. *Пространство мультиструй $J_r^k(N, M)$ определяется как множество объектов следующего вида. Рассмотрим в многообразии N упорядоченный набор из r попарно различных точек и зададим в каждой точке некоторую k -струю отображения $N \rightarrow M$.*

Пространство $J_r^k(N, M)$ всех таких наборов k -струй очевидным образом является пространством расслоения $J_r^k(N, M) \rightarrow F(N, r)$ над конфигурационным пространством $F(N, r)$ наборов из r попарно различных точек.

Пусть задано ещё некоторое подмногообразие или, более общим образом, стратифицированное подмножество $A \subset J_r^k(N, M)$.

Каждое отображение $f : N \rightarrow M$ определяет сечение $j_r^k(f)$ указанного выше расслоения. В этом случае тоже верна теорема трансверсальности: множество отображений f , расширение $j_r^k(f)$ которых трансверсально к множеству A , плотно в пространстве всех гладких отображений (и, более того, является не более чем счетным пересечением открытых плотных подмножеств относительно топологии Уитни).

Теорема 10 (Слабая теорема Уитни для вложений). *При $m > 2n$ почти любое отображение $f : N^n \rightarrow M^m$ является вложением.*

Действительно, по теореме 5 почти любое такое отображение является иммерсией. Чтобы иммерсия стала вложением, нужно наложить дополнительное условие, которое формулируется в терминах мультиструйных расширений: эти расширения не должны пересекать подмножества в $J_2^k(N, M)$, $k \geq 0$, состоящего из пар струй, значения которых в M совпадают. При $m > 2n$, коразмерность этого подмножества больше чем размерность отображаемого многообразия $F(N, 2)$, и теорема сведена к мультиструйной теореме Тома.

Теорема 11 (Сильная теорема Уитни об иммерсиях). *Пусть N^n и M^m — гладкие многообразия, причем N^n компактно. Тогда при $m \geq 2n - 1$ ($n \geq 2$) существует иммерсия $f : N^n \rightarrow M^m$.*

Нужно разобрать лишь случай $m = 2n - 1$. Простейший случай: $m = 3$, $n = 2$. В этом случае почти любое отображение имеет конечное число особых точек, причем вблизи них образ отображения в M^3 объемлемо диффеоморфен зонтику Уитни без “ручки”. Канонический пример такой особой точки задается отображением

$$y_1 = x_1 x_2, y_2 = x_2, y_3 = x_1^2;$$

любой другой зонтик сводится к этому стандартному подходящим выбором локальных координат y_i в образе и x_i в прообразе. (Для доказательства того, что это — все возможные особенности, возникающие у отображений общего положения, нужно рассмотреть пространство 3-струй $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$. Это — конечномерное пространство. В нем есть неособая часть, соответствующая локальным иммерсиям, и особая. Исследование неособой части особой части (то есть ее максимального страта, который только и может пересекаться струйным расширением типичного отображения $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$) дает требуемый результат.) Из любого зонтика выходит линия самопересечения образа, которая может кончаться только в другом зонтике, поэтому число зонтиков четно. Подтягиваем парные зонтики по линии самопересечения друг к другу и уничтожаем их при помощи стандартной перестройки, см. рис. При произвольном $n > 1$ и $m = 2n - 1$ доказательство точно такое же.

При фиксированном n число $m(n)$, для которого для любого многообразия N^n существует иммерсия $N^n \rightarrow \mathbf{R}^{m(n)}$, может оказаться меньше $2n - 1$. Только при $n = 2^k$ оценка неуллучшаема: с помощью характеристических классов Штифеля–Уитни доказывается, что многообразие $\mathbf{R}P^n$, $n = 2^k$, нельзя иммерсировать в $\mathbf{R}^{2n-2}$ и нельзя вложить в $\mathbf{R}^{2n-1}$.

Вот один результат, непосредственно примыкающий к этому вопросу.

Теорема Смейла — Хирша. Пусть $R \subset C^k(N, M)$ — множество в каком-то смысле неособых отображений. А именно, если задано “особое” множество $A \subset J^k(N, M)$, то $R = R(A)$ — множество таких отображений, что их k -струйные расширения не пересекают A . По-другому можно сказать так: берем отображения, k -струйные расширения которых являются сечениями очевидной проекции $(J^k(N, M) \setminus A) \rightarrow N$. Во всех интересных примерах эта проекция — локально тривиальное расслоение (например, когда A соответствует инвариантно определенному классу особенностей отображений). Рассмотрим также пространство R_{form} , состоящее из *всех* непрерывных сечений этого расслоения.

Ясно, что $R \subset R_{form}$. Польза от рассмотрения пространства R_{form} связана с тем, что это пространство устроено проще, чем R . Изучение пространства всех непрерывных сечений локально тривиальных расслоений является классической задачей гомотопической топологии, для решения которой имеются сильные методы. Более того, если многообразие N параллелизуемо, то наше расслоение тривиально, и пространство таких сечений совпадает с пространством непрерывных отображений $N \rightarrow (J_{(x)}^k(N, M) \setminus A)$.

С другой стороны, часто эти пространства R и R_{form} оказываются гомотопически эквивалентными. Или у них оказываются хотя бы одинаковые гомотологии.

Например, пусть многообразие N^n компактно и $n < m$. Пусть R — множество всех иммерсий $N^n \rightarrow M^m$.

Теорема 12. *В таком случае пространство R слабо гомотопически эквивалентно R_{form} , т.е. вложение $R \hookrightarrow R_{form}$ индуцирует изоморфизм всех гомотопических групп, а следовательно и всех групп гомологий и когомологий.*

Эта теорема была доказана Смейлом для случая $N = S^n$, $M = \mathbf{R}^m$, а затем обобщена Хиршем на общий случай.

По-другому в случае $M = \mathbf{R}^m$ эту теорему можно сформулировать следующим образом. Начнем с задачи о существовании такой иммерсии. Есть необходимое условие: если существует иммерсия $N^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, то существует m таких непрерывных сечений касательного расслоения TN (т.е. векторных полей), что в каждой точке $x \in N$ они порождают касательное пространство в этой точке. Теорема Смейла — Хирша утверждает, что верно и обратное, причем гомотопические классы иммерсий и сечений находятся во взаимно однозначном соответствии. Более того, пространство всех таких наборов и пространство иммерсий слабо гомотопически эквивалентны.

Критерий взрезанного квадрата. Обсудим теперь обобщения задачи о вложениях. Для вложений имеется препятствие взрезанного квадрата (deleted product). Пусть M — многообразие (или любое топологическое пространство). Рассмотрим конфигурационное пространство $B(M, 2)$, точки которого — это неупорядоченные пары различных точек в M . Если есть вложение $f : M \rightarrow \mathbf{R}^n$, то по нему можно построить отображение $B(M, 2) \rightarrow \mathbf{R}P^{n-1}$: любой точке $(a, b) \in B(M, 2)$ ставится в соответствие (неориентированное) направление $f(a) - f(b)$. По-другому можно это отображение представлять как эквивариантное отображение $F(M, 2) \rightarrow S^{n-1}$ ($F(M, 2)$ — это аналогичное пространство упорядоченных пар точек в M .) Здесь имеется в виду эквивариантность относительно действия группы $\mathbf{Z}_2$: на $F(M, 2)$ эта группа действует как перестановка точек, а на S^{n-1} как антиподальное отображение. Эквивариантность означает, что если пара $(a, b) \in F(M, 2)$ переходит в $\alpha \in S^{n-1}$, то пара $(b, a) \in F(M, 2)$ переходит в $-\alpha \in S^{n-1}$.

Отображение $p : B(M, 2) \rightarrow \mathbf{R}P^{n-1}$ должно удовлетворять следующему условию. В $H^1(B(M, 2), \mathbf{Z}_2)$ есть класс $(\pm)$, который сопоставляет пути 0 или 1 в зависимости от того, сохраняет или переставляет точки пары обход вдоль этого пути. Класс $(\pm)$ должен быть равен $p^*(\alpha)$, где α — образующая в кольце когомологий пространства $\mathbf{R}P^{n-1}$.

Это условие накладывает достаточно сильные ограничения на вложимость. Например, если n -я степень класса $(\pm)$ не равна нулю в $H^n(B(M, 2), \mathbf{Z}_2)$, то вложения не существует, потому что $\alpha^n = 0$, а когомологическое умножение естественно.

Так можно получить, например, препятствия к вложению графов в плоскость. Знаменитая теорема Куратовского утверждает, что граф можно вложить в плоскость тогда и только тогда, когда он не содержит подграф, изоморфный либо полному графу на 5 вершинах, либо графу из 9 ребер, соединяющих любую из некоторых 3 вершин с любой из 3 оставшихся. Для обоих этих графов невложимость следует из предыдущего рассуждения.

4. СИМПЛИЦИАЛЬНЫЕ РАЗРЕШЕНИЯ. ГОМОЛОГИИ ДИСКРИМИНАНТОВ И НАБОРОВ ПЛОСКОСТЕЙ

Такие разрешения обобщают комбинаторную формулу включений-исключений и, подобно ей, позволяют распутывать топологию объединения множеств, все пересечения которых устроены достаточно просто. В простейшем случае объединения двух множеств у нас получается формула Майера-Вьеториса.

Вот следующий пример: топология набора прямых на плоскости (причем мы будем прежде всего рассматривать гомологии Бореля-Мура такого набора, или что то же самое, обычные гомологии его одноточечной компактификации). Нулевой шаг разрешения — все прямые, входящие в набор, надо взять по отдельности. А потом для каждой точки пересечения выделить соответствующие точки на разведенных прямых и соединить отрезками. Если все пересечения были простыми (двукратными), то на этом процедура и заканчивается. Если же была, например, точка трехкратного пересечения, то так мы получим границу треугольника, и надо заклеить ее его внутренностью; если на самом деле это была точка четырехкратного пересечения, то сделав это для всех участвующих в ней троек, мы получим границу тетраэдра, которую тоже надо заклеить, и т.п. В результате мы получим некоторый комплекс, обладающий проекцией на исходный. Прообраз любой точки при этой проекции является симплексом какой-то размерности, и вся эта проекция является гомотопической эквивалентностью (а также определяет гомотопическую эквивалентность одноточечных компактификаций). В частности, она задает изоморфизм групп гомологий.

Аналогичная конструкция для объединения более общих пространств выглядит следующим образом. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^N X_i$ — клеточный комплекс, причем все подпространства X_i и всевозможные их пересечения в любом количестве являются его подкомплексами. Затем рассмотрим произведение X на N -вершинный симплекс Δ^{N-1} и в этом произведении следующее подмножество: для любого набора индексов $I \subset \{1, \dots, N\}$ мы берем прямое произведение подкомплекса $\bigcap_{i \in I} X_i$ комплекса X на грань симплекса Δ^{N-1} , натянутую на вершины с номерами $i \in I$. Объединение $\tilde{X}$ всех таких произведений по всем $I \subset \{1, \dots, N\}$ проектируется на X , причем прообразы всех точек являются симплексами. Эта проекция является гомотопической эквивалентностью и в разумных случаях определяет гомотопическую эквивалентность одноточечных компактификаций. другой стороны, гомологии $\tilde{X}$ удобно вычислять с

помощью спектральной последовательности, определенной следующей фильтрацией. Первый член $F_1(X)$ этой фильтрации — это дизъюнктное объединение множеств X_i , реализованное как прообраз множества вершин при проекции $\tilde{X} \rightarrow \Delta^{N-1}$. Второй член $F_2(X)$ получается добавлением прообраза ребер симплекса Δ^{N-1} , он полностью описывается в терминах пересечений ровно двух множеств X_i и т.п. Получающаяся спектральная последовательность называется спектральной последовательностью Майера-Вьеториса. Во многих интересных случаях эта последовательность стабилизируется в первом же члене: $E_\infty = E_1$. В частности, это верно в случае, когда X_i — то набор аффинных плоскостей (любых размерностей) в $\mathbf{R}^n$. Более того, в этом случае имеет место гомотопическое расщепление: одноточечная компактификация множества $\tilde{X}$ (или, что то же самое, исходного множества) X гомотопически эквивалентна букету последовательных факторпространств этой фильтрации:

$$\bar{X} \sim \bigvee_p (\overline{F_p(X)}/\overline{F_{p-1}(X)}),$$

где $\overline{F_p(X)}$ — одноточечная компактификация p -го члена нашей фильтрации разрешения. Гомологическое следствие этого расщепления называется формулой Горески-Макферсона; она полностью выражает гомологии X терминах размерностей пересечений всевозможных множеств X_I .

Уже пример прямых на плоскости показывает, что это построение иногда может быть упрощено. Например, если мы имеем три прямые, пересекающиеся в одной точке, то по описанной процедуре над этой точкой возникнет заполненный треугольник. Более экономно (и с многих позиций более правильно) было бы стянуть эти три точки на разведенных прямых не треугольником, а треножником, то есть одномерным комплексом. Это упрощение формулируется в терминах порядковых комплексов частично упорядоченных множеств.

4.1. Дискриминанты в пространстве вещественных полиномов. Следующий класс задач, в котором работает эта же техника, — это теория дискриминантов. Вот самая простая из этих задач.

Обозначим через P_d пространство всех вещественных многочленов вида

$$(5) \quad x^d + a_1 x^{d-1} + \dots + a_{d-1} x + a_d.$$

В нем для любого $k = 2, \dots, d$ определено соответствующее дискриминантное подмножество Σ_k , состоящее из всех многочленов, имеющих хотя бы один k -кратный корень. Задача — посчитать гомологии (а также и гомотопический тип) дополнительного множества $P_d \setminus \Sigma_k$. Эту задачу можно решить аналогично предыдущему, то есть с помощью подходящего симплицального разрешения. Первый шаг его (аналогичный разведению прямых в разные стороны) — это *тавтологическая нормализация* дискриминанта, состоящая в убиении квантора существования: мы заменяем множество

$$\Sigma_k = \{f \in P_d \mid \exists x : f(x) = f'(x) = \dots = f^{k-1}(x) = 0\}$$

на множество пар

$$(f, x) \in (P + d \times x) : f(x) = f'(x) = \dots = f^{k-1}(x) = 0.$$

Это множество является расслоением над $\mathbf{R}^1$ со слоем $\mathbf{R}^{d-k}$: для любого $x \in \mathbf{R}^1$ условие $f(x) = f'(x) = \dots = f^{k-1}(x) = 0$ — это k линейно независимых линейных уравнений на f . Топология разрешенного множества стала совсем простой,

но топологический тип при этом поменялся (если $k < d/2$): из некоторых точек дискриминанта (а именно из тех полиномов, у которых несколько k -кратных корней) произошло несколько точек. Поэтому эти точки надо затянуть симплексами: над полиномом, у которого было ровно два k -кратных корня, должен получиться отрезок (соединяющий две точки нормализации), и вообще над полиномом с t такими корнями должен получиться $(t - 1)$ -мерный симплекс. Возникшее множество проектируется на Σ_k и эта проекция индуцирует изоморфизм всевозможных групп гомологий. С другой стороны, на этом пространстве имеется естественная фильтрация: начальная нормализация — это ее первый член, добавляя объединение приклеенных отрезков получаем второй член, добавляя треугольники — третий и т.п. Разность p -го и $(p - 1)$ -го членов пуста если $pk > d$, в противном случае эта разность является пространством расслоения, база которого — множество $B(\mathbf{R}^1, p)$ неупорядоченных наборов из p точек в $\mathbf{R}^1$, а слой над такой точкой $(x_1, \dots, x_p)$ — это произведение пространства $\mathbf{R}^{d-pk}$ (имеющего смысл пространства всех многочленов вида (5), имеющих k -кратные корни именно в этих p точках) и открытого $(p - 1)$ -мерного симплекса. Поскольку база этого расслоения топологически тривиальна, все это пространство гомеоморфно клетке размерности $d - p(k - 2) - 1$. Спектральная последовательность, порожденная этой фильтрацией и считающая гомологии Бореля–Мура пространства Σ_k , тут же и вырождается (в члене E_1 : очевидно, никакой последующий ее дифференциал не действует из ненулевой клетки в ненулевую). Это немедленно дает вычисление этих гомологий (а именно мы имеем свободную образующую в каждой размерности, в которой есть такая клетка, и нули во всех последующих). По двойственности Александера, это дает полное вычисление когомологий пространства $P_d \setminus \Sigma_k$.

Более того, в действительности эти результаты имеют не только гомологическое, но и гомотопическое значение. А именно, одноточечная компактификация пространства Σ_k гомотопически эквивалентна букету сфер, соответствующих всем этим клеткам (и имеющих такие же размерности). Дополнительное пространство $P_d \setminus \Sigma_k$ тоже гомотопически эквивалентно некоторому пространству, имеющему ровно по одной клетке в тех размерностях, в которых у этого пространства нетривиальные гомологии, однако они связаны между собой более сложным образом: например, в этих пространствах как правило нетривиально когомологическое умножение. Немного более конкретный ответ тут таков: пространство $P_d \setminus \Sigma_k$ гомотопически эквивалентно некоторому остову пространства петель $(k - 1)$ -мерной сферы.

4.2. Дополнение до дискриминанта, стабилизация его гомологий и топология пространства петель. В последнее время мы занимались вычислением когомологий пространств $P_d \setminus \Sigma_k$. Ответ получили такой: когомологии равны $\mathbf{Z}$ в размерностях $0, (k - 2), 2(k - 2), \dots, [d/k](k - 2)$, в остальных размерностях когомологии нулевые.

Следующая задача — вопрос о стабилизации этих групп. При $d' > d$ имеется отображение

$$(6) \quad H^*(P_d \setminus \Sigma_k) \leftarrow H^*(P_{d'} \setminus \Sigma_k).$$

Задача состоит в том, чтобы выяснить, как устроено это отображение. Ответ нетрудно угадать.

Теорема 13. *Это отображение — изоморфизм во всех размерностях от 0 до $[d/k](k-2)$, а дальше отображение нулевое.*

Напомним, как устроено отображение когомологий. Оно индуцировано следующим вложением. В $P_{d'}$ имеется страт $\check{\Sigma}_d$, состоящий из полиномов, столь же вырожденных, как самая сложная функция $x^d \in P_d$, то есть имеющих ровно один корень кратности ровно d и не имеющих никаких других кратных корней. Рассмотрим в $P_{d'}$ шаровую окрестность U_ε любого такого полинома $\alpha \in \check{\Sigma}_d$. Имеется гомеоморфизм пар

$$(7) \quad (U_\varepsilon, U_\varepsilon \cap \Sigma_k) \sim (P_d, \Sigma_k) \times \mathbf{R}^{d'-d}.$$

Отождествим P_d с плоскостью $P_d \times \mathbf{R}^{d'-d}$ из правой части этого равенства и получим вложение P_d в U_ε — отождествление с некоторым трансверсальным срезом страта $\Sigma_d \subset P_{d'}$ в его неособой точке. При этом $\Sigma_k(d) \subset P_d$ переходит в $\Sigma_k(d') \subset P_{d'}$. В частности, получаем вложение

$$(P_d \setminus \Sigma_k(d)) \hookrightarrow (P_{d'} \setminus \Sigma_k(d')).$$

Чтобы вычислить встречное отображение в когомологиях, нужно пройти весь путь вычисления когомологий.

Воспользуемся сначала двойственностью Александера, а затем воспользуемся равенством (7) и простейшим вариантом формулы Кюннета для групп $\bar{H}_n$, гомотопий с замкнутыми носителями, а именно: $\bar{H}_n(X \times \mathbf{R}^m) \simeq \bar{H}_{n-m}(X)$. В результате получим диаграмму отображений

$$\begin{array}{ccc} H^i(P_d \setminus \Sigma_k(d)) & \longleftarrow & H^i(P_{d'} \setminus \Sigma_k(d')) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ \bar{H}_{d-i-1}(\Sigma_k(d)) & & \bar{H}_{d'-i-1}(\Sigma_k(d')) \\ \simeq \downarrow & \nearrow \varphi & \\ \bar{H}_{d'-i-1}(\Sigma_k(d') \cap U_\varepsilon) & & \end{array}$$

Здесь верхняя горизонтальная стрелка — это отображение (6), которое мы вычисляем, две верхние вертикальные стрелки — изоморфизмы Александера в P_d и $P_{d'}$, левая нижняя вертикальная стрелка — только что упомянутая формула Кюннета в сочетании с гомеоморфизмом $U_\varepsilon \cap \Sigma_k \sim \Sigma_k \times \mathbf{R}^{d'-d}$ из формулы (7). Гомоморфизм φ задается отображением факторизации по дополнению к окрестности U_ε ,

$$\overline{\Sigma_k(d')} \rightarrow \overline{\Sigma_k(d') / (\overline{\Sigma_k(d')} \setminus U_\varepsilon)} \sim \overline{\Sigma_k(d') \cap U_\varepsilon}.$$

Из определения двойственности Александера получается, что диаграмма коммутативна. Поэтому для того, чтобы вычислить отображение (6), остается вычислить отображение φ .

Мы делали симплициальное разрешение $\overline{\sigma_k(d)}$ пространства $\overline{\Sigma_k(d)}$, это — фильтрованное пространство $\bar{F}_0 \subset \bar{F}_1 \subset \dots \subset \bar{F}_{[d/k]} = \overline{\sigma_k(d)}$. При этом $\bar{F}_1$ — одноточечная компактификация открытого диска F_1 размерности $d-k+1$, то есть сфера размерности $d-k+1$. Затем, при переходе к $\bar{F}_2$, к этой сфере приклеивается клетка меньшей размерности $d-2(k-2)-1$. В результате может получиться лишь нечто, гомотопически эквивалентное букету двух сфер таких размерностей. То же самое происходит и дальше, и окончательно получаем, что $\overline{\sigma_k(d)}$ гомотопически эквивалентно букету $[d/k]$ сфер размерностей $d-p(k-2)-1$, $p=1, 2, \dots, [d/k]$.

Аналогично, пространство $\overline{\Sigma_k(d')}$ (и его симплициальное разрешение $\overline{\sigma_k(d')}$) гомотопически эквивалентны букету сфер размерностей $d' - p(k-2) - 1$, $p = 1, \dots, [d'/k]$.

Процедуру разрешения множества $\bar{\Sigma}_k(d')$ можно ограничить на его пересечение с окрестностью $U_\varepsilon \subset P_{d'}$. Эта процедура выдерживает умножение на прямое слагаемое $\mathbf{R}^{d'-d}$, то есть гомеоморфизм $(\Sigma_k(d') \cap U_\varepsilon) \sim \Sigma_k(d) \times \mathbf{R}^{d'-d}$, вытекающий из формулы (7), поднимается до гомеоморфизма

$$(8) \quad (\sigma_k(d') \cap \pi^{-1}(U_\varepsilon)) \sim \sigma_k(d) \times \mathbf{R}^{d'-d}.$$

Поэтому вместо отображения φ можно изучать соответствующее отображение симплициальных разрешений, то есть верхнюю строку коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \bar{H}_{d'-i-1}(\sigma_k(d') \cap \pi^{-1}(U_\varepsilon)) & \longleftarrow & \bar{H}_{d'-i-1}(\sigma_k(d')) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ \bar{H}_{d'-i-1}(\Sigma_k(d') \cap U_\varepsilon) & \xleftarrow{\varphi} & \bar{H}_{d'-i-1}(\Sigma_k(d')) \end{array}$$

Гомеоморфизм (8) уважает фильтрацию. А именно, на множестве $\sigma_k(d') \cap \pi^{-1}(U_\varepsilon)$ есть фильтрация, индуцированная из $\sigma_k(d')$ и фильтрация как фильтрованного множества $\sigma_k(d)$, умноженного на $\mathbf{R}^{d'-d}$. Это — одна и та же фильтрация.

Получаем отображение гомологических спектральных последовательностей для $\sigma_k(d) \times \mathbf{R}^{d'-d}$ и $\sigma_k(d')$. В начальных полосах (при $p \leq [d/k]$) их группы $E_{p,q}^1$ изоморфны как алгебраические объекты. Остается доказать, что изоморфизм между ними задается уже гомоморфизмом наших спектральных последовательностей. При любом p это отображение групп $E_{p,q}^1 = \bar{H}_{p+q}(F_p \setminus F_{p-1})$ задается факторизацией по прообразу дополнения к U_ε ,

$$(9) \quad \bar{H}_*((F_p \setminus F_{p-1})(\sigma_k(d'))) \rightarrow \bar{H}_*((F_p \setminus F_{p-1})(\sigma_k(d') \cap \pi^{-1}(U_\varepsilon))).$$

Но $(F_p \setminus F_{p-1})(\sigma_k(d'))$ — открытый шар размерности $d' - p(k-2) - 1$, а $(F_p \setminus F_{p-1})(\sigma_k(d') \cap \pi^{-1}(U_\varepsilon))$ — его открытое подмножество, также гомеоморфное шару. Поэтому отображение (9) не может быть ничем иным, как изоморфизмом если оба множества непусты (то есть при $p \leq [d/k]$) и тривиально в ином случае.

В итоге получаем, что отображение (6) не зависит от выбора трансверсального среза страта $\Sigma_d(d')$, то есть вложения $P_d \hookrightarrow P_{d'}$, участвующего в построении этого отображения.

Теорема 1 позволяет нам определить стабильную группу когомологий дополнений к множествам $\Sigma_k(d) \subset P_d$ при $d \rightarrow \infty$ как обратный предел $\varprojlim H^*(P_d \setminus \Sigma_k)$ относительно всех отображений (6). Она имеет группы $\mathbf{Z}$ в всех размерностях, кратных $d-2$, и 0 во всех остальных размерностях.

Теперь прояснился смысл сделанного нами формального перехода к $E_r^{p,q} \cong E_{-p,d-q-1}^r$: эти когомологические спектральные последовательности (определявшиеся для каждого d) с ростом d стабилизируются к некоторой общей спектральной последовательности, вычисляющей эту стабильную группу.

Абстракция перехода к пределу имеет очень простую реализацию. А именно, можно рассмотреть пространство

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1 \mid f \in C^\infty \text{ и } f \equiv 1 \text{ на бесконечности}\}.$$

В $\mathcal{F}$ можно определить подмножество $\Sigma_k = \{f \mid \exists x : f(x) = f'(x) = \dots = f^{(k-1)}(x) = 0\}$.

Теорема 14. $\varprojlim H^*(P_d \setminus \Sigma_k)$ изоморфна $H^*(\mathcal{F} \setminus \Sigma_k)$.

В результате получается, что наша стабильная спектральная последовательность вычисляет когомологии не какого-то абстрактного предела, а естественного топологического пространства $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$.

Эта теорема доказывается с помощью теоремы Вейерштрасса о том, что функцию $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ класса C^k можно равномерно приблизить полиномами на компакте со всеми k производными. Основное утверждение таково. Для любого класса гомологий $\alpha \in H_i(\mathcal{F} \setminus \Sigma_k)$ существует целое число $d(\alpha)$, для которого α лежит в образе очевидного отображения

$$H_*(P_{d(\alpha)} \setminus \Sigma_k) \rightarrow H_*(\mathcal{F} \setminus \Sigma_k)$$

(сглаживание полиномов на бесконечности). Действительно, сингулярный цикл α в $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ можно рассматривать как отображение $a : \Delta \rightarrow \mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ некоторого полиэдра $\Delta \subset \mathbf{R}^n$, не имеющего границы. Этот полиэдр заключен в некотором замкнутом шаре $B^n \subset \mathbf{R}^n$. Продолжим отображение a до непрерывного отображения $a : B^n \rightarrow \mathcal{F}$. Это отображение можно рассматривать как непрерывное отображение $F : (B^n \times \mathbf{R}^1) \rightarrow \mathbf{R}$, такое что для любого $b \in B^n$ ограничение F на прямую $b \times \mathbf{R}^1$ принадлежит классу $\mathcal{F}$, более того, а) существует равномерная константа C такая что $F(b \times x) \equiv 1$ при $|x| \geq C$ и любом $b \in B^n$, б) все производные $\frac{\partial^r F}{\partial x^r}(b, x)$ непрерывно зависят от $b \in B^n$.

Такое отображение можно аппроксимировать гладким отображением $\tilde{F}$, также удовлетворяющим условию а), все производные $\frac{\partial^r \tilde{F}}{\partial x^r}(b, x)$, $r = 0, \dots, k$ которого сколь угодно близки к аналогичным производным F . Тогда его ограничение на полиэдр Δ вновь будет циклом в $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$, гомологичным циклу α . Затем, пользуясь теоремой Вейерштрасса, приблизим $\tilde{F}$ полиномом $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}$, то есть семейством полиномов $\mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}$, зависящим от параметра $b \in \mathbf{R}^n \supset B^n$.

Проблема состоит в том, что теорема Вейерштрасса позволяет приближать функции только на компактах, например, в нашем случае на компакте $B^n \times [-C, C]$, но получающиеся при этом полиномы вообще говоря могут очень плохо вести себя вдали от этого компакта, в частности нет гарантии, что их ограничения на прямые $b \times \mathbf{R}^1$ не будут иметь лишних k -кратных корней. Чтобы справиться с этой проблемой, поступаем следующим образом. Пользуясь растяжениями прямой $\mathbf{R}^1 \ni x$, без ограничения общности можем считать, что $C = 1/2$. Затем, пользуясь теоремой Вейерштрасса, приближаем функцию $\tilde{F}$ сколь угодно хорошо на компакте $B^n \times [-2, 2]$ некоторым полиномом $\Pi(b, x)$. Затем положим $\tilde{\Pi}(b, x) \equiv \Pi(b, x) + x^{2N}$, где N очень велико. Тогда для любого $b \in B^n$ функция $\tilde{\Pi}(b \times \mathbf{R}^1)$ положительна в области где $|x| \geq C = 1/2$: при $|x| \in [1/2, 2]$ это следует из того, что обе функции $\Pi(b, \cdot)$ и x^{2N} там положительны, а при $|x| \geq 2$ — из того, что там все определяется мономом x^{2N} . Наконец, в области где $|x| \leq 1/2$ этот моном очень мал, и наша функция $\tilde{\Pi}$ вновь является очень хорошей аппроксимацией функции $\tilde{F}$.

В нашем случае группа $H^*(P_d \setminus \Sigma_k)$ может только расти с ростом d , поэтому доказывать больше ничего не нужно. Но в общем случае, когда когомологии бесконечномерного пространства вычисляются с помощью последовательности конечномерных аппроксимаций, нужно проверять две вещи. Первое: любой цикл можно реализовать уже в каком-то конечномерном аппроксимирующем пространстве. (Это мы уже сделали). Второе: если на каком-то шаге есть два класса гомологий соответствующего конечномерного пространства,

которые гомологичны внутри бесконечномерного пространства, то они гомологичны внутри какой-то следующей конечномерной аппроксимации. В нашем случае второе очевидно, а в общей ситуации это обычно доказывается очень похожим образом, также с помощью теоремы Вейерштрасса.

С тем же успехом мы могли бы вычислять когомологии множества недискриминантных элементов пространства $P(d, k)$ — множества систем из k полиномов степени d :

$$\begin{cases} x^d + a_1^1 x^{d-1} + \dots + a_1^d \\ \vdots \\ x^d + a_k^1 x^{d-1} + \dots + a_k^d \end{cases}$$

В этом случае в качестве дискриминанта рассмотрим *результантное множество* $\Sigma(d, k)$ (множество систем, имеющих общий корень).

Задача 3. Вычислить $H^*(P(d, k) \setminus \Sigma(d, k))$ при $k \geq 2$.

Задача 4. Вычислить $\varprojlim H^*(P(d, k) \setminus \Sigma(d, k))$ при $k \geq 3$.

Задача 5. Найти топологическое функциональное пространство Φ , когомологии которого являются воплощением этого обратного предела.

Задача 6. Сравнить ответ с предыдущим результатом про $H^*(\mathcal{F} \setminus \Sigma_k)$.

Задача 7. Какой из этого можно сделать вывод о сравнении пространств $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ и $\Phi \setminus \Sigma(\infty, k)$?

Когда мы всё это сделаем, окажется, что мы находимся в рамках следующей теории.

4.3. Обобщенный принцип Смейла — Хирша. Имеется большой класс результатов, обобщающий теорему Смейла-Хирша об иммерсиях.

Сейчас мы рассмотрим еще пару результатов этого типа. Пусть подмножество $\mathcal{F} \subset C^\infty(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$ состоит из функций, тождественно равных 1 на бесконечности. Рассмотрим в $\mathcal{F}$ подмножество

$$\Sigma_k = \{f | \exists x : f(x) = f'(x) = \dots = f^{(k-1)}(x) = 0\}.$$

Когомологии пространства $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ мы уже вычисляли:

$$H^i(\mathcal{F} \setminus \Sigma_k) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{при } i \text{ кратном } k-2; \\ 0 & \text{при всех остальных } i. \end{cases}$$

В терминах струйных расширений множество Σ_k описывается следующим образом. Рассмотрим расслоение $J^{k-1}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1) \rightarrow \mathbf{R}$, $k \geq 3$. Это расслоение тривиально: $J^{k-1}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1) = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^k$. В $J^{k-1}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$ выделим подмножество R , над любой точкой $x \in \mathbf{R}^1$ заданное условием $f(x) = f'(x) = \dots = f^{(k-1)}(x) = 0$, т.е. нулевое сечение этого расслоения. Ясно, что $f \in \Sigma_k$ тогда и только тогда, когда ее струйное расширение пересекает это нулевое сечение. Таким образом, каждая функция из $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ задает сечение расслоения со слоем $\mathbf{R}^k \setminus 0$. Это сечение представляет собой петлю в $\mathbf{R}^k \setminus 0$, а следовательно и в S^{k-1} . Таким образом, получаем вложение $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k \hookrightarrow \Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0) \simeq \Omega S^{k-1}$. Гомологии пространства ΩS^{k-1} вычислялись раньше, при изучении спектральных последовательностей расслоений, и ответ для этих групп оказался точно такой же как для $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$. Оказывается, что это не случайное совпадение: этот изоморфизм групп гомологий задается естественным струйным вложением $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k \rightarrow \Omega S^{k-1}$, более того, это вложение является гомотопической эквивалентностью.

В прошлый раз обсуждался принцип Смейла — Хирша и в связи с ним обсуждался такой пример. Пусть подпространство $\mathcal{F} \subset C^\infty(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$ состоит из функций, тождественно равных 1 на бесконечности. Рассмотрим в $\mathcal{F}$ подмножество

$$\Sigma_k = \{f | \exists x : f(x) = f'(x) = \dots = f^{(k-1)}(x) = 0\}.$$

Мы будем предполагать, что $k \geq 3$. Гомологии пространства $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ такие же, как гомологии пространства $\Omega(S^{k-1})$. Это не просто случайное совпадение. Дело в том, что отображение $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k \rightarrow \Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0) \sim \Omega(S^{k-1})$, сопоставляющее функции ее $(k-1)$ -струйное расширение, при $k \geq 3$ индуцирует гомотопическую эквивалентность. При $k > 3$ пространство $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ односвязно, поэтому достаточно доказать, что это отображение индуцирует изоморфизм гомологий. При $k = 3$ утверждение о гомотопической эквивалентности также верно, но доказывается сложнее.

Изоморфизм гомологий доказывается следующим образом. При вычислении гомологий пространства $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$ мы аппроксимировали его конечномерными пространствами $P_d \setminus \Sigma_k$. Гомологии пространства $\Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0)$ вычисляются аналогично: это пространство аппроксимируется пространствами $\Pi(m, k) \setminus \Sigma(m, k)$. Здесь $\Pi(m, k)$ — пространство систем из k многочленов

$$\begin{cases} x^m + a_1^1 x^{m-1} + \dots + a_1^m, \\ \dots \\ x^m + a_k^1 x^{m-1} + \dots + a_k^m. \end{cases}$$

(На самом деле, на бесконечности многочлены ведут себя не так, как нужно. Но их можно пригладить и получить отображение в отмеченную точку.) Пространство $\Sigma(m, k)$ соответствует системам, имеющим общее решение. Группы гомологий и когомологий пространств $\Pi(m, k) \setminus \Sigma(m, k)$ при $m \rightarrow \infty$ сходятся к аналогичным группам пространства $\Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0)$, т.е. для любого i найдется $m_0 = m_0(i)$ такое что при всех $m \geq m_0$ имеются изоморфизмы $H^j(\Pi(m, k) \setminus \Sigma(m, k)) \simeq H^j(\Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0))$ при $j < i$. Более того, это же верно и для всех гомотопических групп.

Гомологии пространства $\Pi(m, k) \setminus \Sigma(m, k)$ вычисляются точно так же, как и гомологии пространства $P_d \setminus \Sigma_k$. А именно, пользуясь двойственностью Александера сводим эту задачу к вычислению замкнутых гомологий особого множества $\Sigma(m, k)$, затем строится симплициальное разрешение этого множества, и на этом разрешении берется фильтрация $F_1 \subset F_2 \subset \dots$, где $F_i \setminus F_{i-1}$ — расслоение над $B(\mathbf{R}^1, i)$ со слоем $\Delta_{i-1} \times \mathbf{R}^{(m-i)k}$. Спектральная последовательность выглядит точно так же, и можно сравнить напрямую аппроксимирующие пространства. Если удастся доказать естественную изоморфность групп гомологий этих пространств, то предельным переходом получим искомый изоморфизм между когомологиями бесконечномерных пространств $\Omega(\mathbf{R}^k \setminus 0)$ и $\mathcal{F} \setminus \Sigma_k$.

На самом деле имеет место гораздо более точный факт: пространства $P_{mk} \setminus \Sigma_k$ и $\Pi(m, k) \setminus \Sigma(m, k)$ гомотопически эквивалентны. Доказывается это довольно сложно, в частности потому что построить отображения, являющиеся гомотопическими эквивалентностями, нелегко. Для этого их нужно сначала вложить в одно и то же пространство, а именно, в пространство систем многочленов

$$(10) \quad \begin{cases} x^{mk} + \dots \\ x^{mk-1} + \dots \\ \dots \\ x^{mk-k+1} + \dots \end{cases}$$

Пространство P_{mk} вкладывается следующим образом: каждому полиному сопоставляем его самого и его производные (точнее говоря, производные, деленные на некоторое число, чтобы старший коэффициент многочлена был равен 1).

Пространство $\Pi(m, k)$ вкладывается следующим образом: каждой полиномиальной системе сопоставляется большой отрезок, вне которого она не может иметь общих корней. Затем полиномы из нашей системы домножаются на полиномы подходящих степеней, все корни которых лежат далеко за пределами этого отрезка и заведомо все различны. Эти вложения отображают дискриминантные множества в дискриминантное множество и поднимаются до вложений симплициальных разрешений этих пространств. Из совпадения первых членов спектральных последовательностей с помощью леммы Борсука доказывается, что эти вложения продолжаются до гомотопической эквивалентности подходящих кратных надстроек одноточечных компактификаций пространств разрешений σ_k и $\sigma(m, k)$ на одноточечную компактификацию m -го члена фильтрации разрешения дискриминанта в пространстве систем (10). Отсюда уже следует, что наши вложения индуцируют изоморфизм групп когомологий обоих пространств $P_{mk} \setminus \Sigma_k$ и $\Pi(m, k) \setminus \Sigma(m, k)$ на некоторый начальный отрезок группы когомологий множества нерезультантных систем вида (10). Отсюда выводится (с использованием специфических свойств пространств петель) что оба пространства гомотопически эквивалентны m -мерному остову последнего пространства, а также и пространства ΩS^{k-1} .

Группы кос и их гомологии. Если X — топологическое пространство, то через $B(X, k)$ обозначается его k -е *конфигурационное пространство*, т.е. множество всех неупорядоченных наборов из k попарно различных точек в X ; $F(X, k)$ — пространство упорядоченных наборов, т.е. $F(X, k) = X^k \setminus \Delta$, где

$$\Delta = \{x_1, \dots, x_k \mid x_i = x_j \text{ для некоторых } i \neq j\}.$$

Топология на $F(X, k)$ определяется очевидным образом. На $F(X, k)$ действует группа подстановок $S(k)$ и $B(X, k) = F(X, k)/S(k)$. Это позволяет определить (фактор)топологию на $B(X, k)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа кос из k нитей, $Br(k)$, это группа $\pi_1(B(\mathbf{R}^2, k))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $B(\mathbf{R}^2, k)$ — пространство типа $K(Br(k), 1)$, т.е. все остальные гомотопические группы нулевые. Аналогично, $F(\mathbf{R}^2, k)$ также пространство типа $K(\pi, 1)$ для некоторой группы, которая обозначается $I(k)$ и называется группой крашенных кос из k нитей.

Для доказательства этого утверждения можно рассмотреть точную гомотопическую последовательность расслоения $F(\mathbf{R}^2, k) \rightarrow F(\mathbf{R}^2, k-1)$ со слоем $\mathbf{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ точка}\}$. У $\mathbf{R}^2 \setminus \{k-1 \text{ точка}\}$ все гомотопические группы порядка ≥ 2 нулевые, поэтому можно применить индукцию. Ясно также, что все гомотопические группы порядка ≥ 2 у пространств $B(\mathbf{R}^2, k)$ и $F(\mathbf{R}^2, k)$ одинаковые.

Рассмотрим теперь объекты, которые, собственно, и называются косами. Рассмотрим квадрат, вложенный в $\mathbf{R}^3$. Отметим на левой и правой сторонах квадрата по k точек, лежащих точно напротив друг друга, и соединим каждую точку с левой стороны с некоторой точкой на правой стороне системой непересекающихся C^1 -гладких нитей в $\mathbf{R}^3$, при этом при движении точки по нити ее координата на горизонтальной оси должна быть строго монотонной функцией, т.е. при движении от одной стороны квадрата к другой стороне нить не должна поворачивать обратно. Две косы *эквивалентны*, если их можно перевести друг в друга непрерывной деформацией в пространстве всех кос, см. например рисунки ниже.

Прикладывая правую сторону одного квадрата к левой стороне другого квадрата, стирая эту сторону, а затем сжимая полученный прямоугольник, получаем групповую операцию на множестве классов эквивалентности кос.

Эта интерпретация группы кос легко получается из предыдущей: выберем в пространстве $B(\mathbf{R}^2, k)$ в качестве отмеченной точки конфигурацию из k точек, лежащих на единичном отрезке и отождествим этот отрезок с левой стороной квадрата. В качестве нижней стороны выберем ось t . Тогда элемент группы $Br(k) = \pi_1(B(\mathbf{R}^2, k))$ как раз и будет представлен такой косой, потому что при $t = 1$ мы возвращаемся в отмеченную точку.

Обратный элемент группы кос получается как зеркальное отражение косы.

Третье определение группы кос — алгебраическое, с помощью образующих и соотношений. Группа кос $Br(k)$ — это группа с образующими $a_1, \dots, a_{k-1}$ и соотношениями

$$a_i a_j = a_j a_i, \text{ если } |i - j| \geq 2;$$

$$a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}.$$

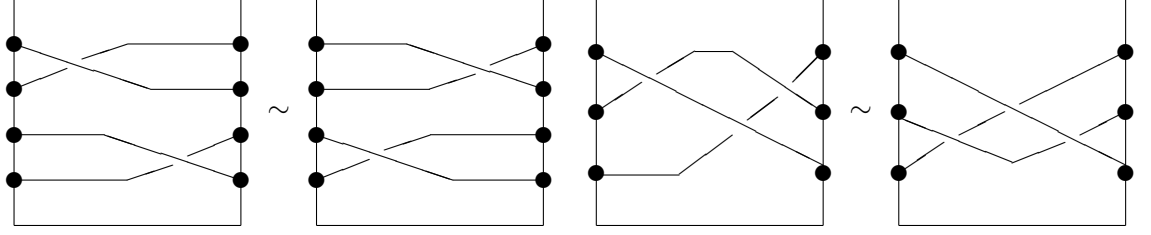
Образующие $a_1, \dots, a_{k-1}$ — это элементарные косы, т.е. косы с одним перекрестком. Если i -я нить проходит под $(i+1)$ -й, то получаем образующую a_i , а если i -я нить проходит над $(i+1)$ -й, то получаем образующую a_i^{-1} .

Любую косу малым шевелением можно привести к такому виду, что точки пересечения (перекрестки) будут лежать на разных вертикальных прямых. Проведя вертикальные разрезы так, чтобы между любыми двумя вертикальными прямыми был расположен только один перекресток, получим представление косы в виде композиции элементарных кос.

Соотношения возникают из преобразований, изображенных на рисунке.

Имеется нетривиальный гомоморфизм $Br(k) \rightarrow \mathbf{Z}$. А именно, каждому слову, составленному из образующих, можно сопоставить сумму степеней образующих.

Теперь четвертое определение: $Br(k) = \pi_1(P_k^{\mathbf{C}} \setminus \Sigma_2)$, где $P_k^{\mathbf{C}}$ — пространство полиномов $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \dots + \lambda_k$ с комплексными коэффициентами; из этого пространства выбрасывается множество Σ_2 полиномов с кратными комплексными корнями. Во многих ситуациях это определение самое удобное.



Стабильная группа кос. Рассмотрим вложение $Br(k) \subset Br(k+r)$, устроенное следующим образом: к косе из $Br(k)$ пририсовываем снизу r тривиальных (горизонтальных) нитей. Предел (объединение) таких групп — это стабильная группа кос Br .

По-другому вложение $Br(k) \subset Br(k+r)$ можно описать следующим образом. К набору точек $(z_1, \dots, z_k)$ добавляем точку $z_{k+1} = (\max |z_i| + 1, 0) \in \mathbf{R}^2$. Затем повторяем эту процедуру еще $r-1$ раз.

Правильная задача — вычисление гомологий групп $Br(k)$. (Напомним, что гомологиями топологической группы g называются гомологии соответствующего классифицирующего пространства, то есть, в случае дискретных групп, пространства $K(g, 1)$. В частности, $H^*(Br(k)) \equiv H^*(B(\mathbf{R}^2, k)) \equiv H^*(P_k^{\mathbf{C}} \setminus \Sigma_2)$.)

Для коэффициентов $\mathbf{Z}_2$ эту задачу решил Д.Б.Фукс (1970).

Первое наблюдение принадлежит Арнольду: $H^i(B(\mathbf{C}^1, k), G) = 0$ при $i \geq k$ для любой группы коэффициентов G . Это вытекает из весьма общей теоремы. Пусть имеется комплексное аффинное алгебраическое многообразие $M^d \subset \mathbf{C}^N$ (d — комплексная размерность). Тогда $H^i(M^d, G) = 0$ при $i > d$. Это доказывается с помощью теории Морса: существует функция Морса, у которой индекс любой критической точки не превосходит d . К рассматриваемой ситуации это применяется следующим образом. Подмножество $\Sigma_2 \subset \mathbf{C}^k$ задается полиномиальным уравнением $\Delta(\lambda) = 0$ (Δ — дискриминант общего полинома степени k с коэффициентами $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$). Рассмотрим пространство $\mathbf{C}^{k+1}$ с координатами $\lambda_1, \dots, \lambda_k, t$ и в этом пространстве рассмотрим гиперповерхность $\Delta(\lambda)t = 1$. Проекция этой гиперповерхности на $\mathbf{C}^k$ вне множества $\Sigma_2 \subset \mathbf{C}^k$ является диффеоморфизмом. Поэтому пространство $\mathbf{C}^k \setminus \Sigma_2$ диффеоморфно алгебраическому аффинному многообразию размерности k , а значит, у него нет гомологий размерности больше k .

Но утверждалось нечто большее, а именно, что нет гомологий и в размерности k . Чтобы доказать это, нужно воспользоваться тем, что на паре $(\mathbf{C}^k, \Sigma_2)$ свободно действует группа сдвигов аргумента z , т.е. можно перейти к пространству размерности $k-1$.

Пользуясь двойственностью Пуанкаре, вместо группы $H^*(B(\mathbf{R}^2, k), \mathbf{Z}_2)$ будем вычислять изоморфную ей группу гомологий одноточечной компактификации, $\bar{H}_{2k-*}(B(\mathbf{R}^2, k), \mathbf{Z}_2)$. Эта компактификация устроена так: все уходы точек наших k точек на бесконечность в $\mathbf{R}^2$ и сталкивания (слияния) разных точек соответствуют стремлению к добавленной “бесконечно удаленной” точке. Клеточное разбиение одноточечной компактификации строится следующим образом. Введем на плоскости $\mathbf{R}^2$ координаты (x, y) . Конфигурации из k точек сопоставим набор чисел (мультииндекс) $(m_1, \dots, m_t)$, где $\sum m_i = k$. Для этого рассмотрим вертикальную прямую, движущуюся из $-\infty$, и рассмотрим первое

ее положение, когда она наталкивается на точку из конфигурации. Пусть m_1 — количество точек конфигурации, которое окажется в этот момент на прямой. Во второй раз на прямой окажется m_2 точек, и т.д.

Легко проверить, что множество точек с данным мультииндексом $(m_1, \dots, m_t)$ — открытая клетка коразмерности $k - t$. Все эти клетки (плюс добавленная точка) образуют клеточное разбиение одноточечной компактификации конфигурационного пространства. В частности, гомологии этой компактификации можно вычислять с помощью соответствующего клеточного комплекса, группы C_i которого порождены всевозможными клетками размерности i , а граничные операторы задаются коэффициентами инцидентности клеток соседних размерностей, т.е. с соседними значениями чисел t .

Такие клетки инцидентны геометрически тогда и только тогда, когда соответствующие им индексы $(m_1, \dots, m_t)$ и $(m'_1, \dots, m'_{t-1})$ почти совпадают, и только для одного значения $i = 1, 2, \dots, t - 1$ имеем $m_i + m_{i+1} = m'_i$ (далее $m_{i+2} = m'_{i+1}$, и т.д.). Нас интересуют коэффициенты инцидентности по модулю 2. Ориентации в таком случае нас не интересуют. Легко видеть, что такой коэффициент инцидентности равен $\binom{m_i + m_{i+1}}{m_i}$.

Задача 8. Провести вычисление всех гомологий $\text{mod } 2$ для небольших k при помощи указанного клеточного комплекса.

Эти (и даже, более того, целочисленные) гомологии можно вычислять и с помощью симплицального разрешения дискриминанта $\Sigma_2 \subset P_k^{\mathbf{C}}$. Это симплицальное разрешение является естественно фильтрованным пространством, причем член $F_i \setminus F_{i-1}$ этой фильтрации — расслоение над $B(\mathbf{C}^1, i)$ со слоем $\Delta^{\circ i-1} \times \mathbf{C}^{k-2i}$. При этом

$$E_{i,q}^1 = \bar{H}_{i+q}(F_i \setminus F_{i-1}, \mathbf{Z}) = \bar{H}_{i+q-(i-1)-2(k-2i)}(B(\mathbf{C}^1, i), \pm \mathbf{Z}),$$

где $\pm \mathbf{Z}$ — локальная система групп, локально изоморфных $\mathbf{Z}$, но меняющих ориентацию при обходе вдоль пути в базе, задающего нечетную перестановку k точек. Эта группа локальных коэффициентов возникает из-за того, что расслоение симплексов неориентировано и меняет ориентацию в точности когда вершины этих симплексов переставляются нечетным образом. Но для коэффициентов $\mathbf{Z}_2$ это несущественно.

Как и в случае дискриминантов в пространстве вещественных полиномов, спектральная последовательность вырождается в члене E^1 (однако теперь это уже очень непростая теорема), поэтому вычисление группы $H^*(Br(k), \mathbf{Z}_2)$ сводится к вычислению аналогичных групп $H^*(Br(i), \mathbf{Z}_2)$ с $i \leq [k/2]$.

Принцип Смейла–Хирша в этом случае верен только в гомологической формулировке:

Задача 9. Докажите, что $H^*(Br) \cong H^*(\Omega^2 S^3)$. Почему это утверждение естественно считать проявлением принципа Смейла–Хирша?

С другой стороны, эти пространства не гомотопически эквивалентны: действительно, $\pi_1(\Omega^2 S^3) = \pi_3(S^3) \simeq \mathbf{Z} \neq Br$.

5. КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Пусть задан набор (m, G, n, F) , где m, n — целые числа, G, F — абелевы группы. Когомологическая операция типа (m, G, n, F) — это правило, которое любому топологическому пространству X и любому элементу группы $H^m(X, G)$ сопоставляет элемент группы $H^n(X, F)$, причем это сопоставление функториально по X . Функториальность означает следующее. Отображение $f : X \rightarrow Y$ индуцирует отображения

$$\begin{array}{ccc} H^m(X, G) & \leftarrow & H^m(Y, G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(X, F) & \leftarrow & H^n(Y, F). \end{array}$$

Эта диаграмма должна быть коммутативной.

Следует отметить, что сопоставление, участвующее в определении когомологической операции, не обязано быть гомоморфизмом.

Простейший пример когомологической операции — возведение в степень: элементу $\alpha \in H^n(X, G)$ сопоставляется элемент $\alpha^k \in H^{nk}(X, G)$.

Есть еще довольно известная когомологическая операция — гомоморфизм Бокштейна. Если есть короткая точная последовательность групп

$$0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 0,$$

то возникает короткая точная последовательность коцепных комплексов

$$0 \leftarrow C^*(X, G_1) \leftarrow C^*(X, G_2) \leftarrow C^*(X, G_3) \leftarrow 0.$$

Из нее, в свою очередь, возникает длинная точная последовательность групп когомологий. В этой длинной точной последовательности есть два вида дифференциалов, сохраняющих размерность, и дифференциал

$$\delta : H^i(X, G_1) \rightarrow H^{i+1}(X, G_3).$$

Это и есть гомоморфизм Бокштейна.

Когомологические операции одного типа можно складывать, поэтому они образуют группу. Эту группу описывает следующая структурная теорема.

Теорема 15. *Группа всех когомологических операций типа (m, G, n, F) естественно изоморфна группе $H^n(K(G, m), F)$.*

Из этого утверждения, в частности, следует, что когомологические операции могут только повышать размерность (или сохранять).

Раньше была доказана такая теорема:

$$(11) \quad H^n(X, G) = \Pi(X, K(G, n)).$$

Напомним, как реализуется это равенство. В $H^n(K(G, n), G)$ есть тавтологический класс τ , сопоставляющий любому n -мерному циклу его собственный класс в $G = \pi_n(K(G, n))$. Для каждого класса $\alpha \in H^n(X, G)$ можно построить отображение $X \rightarrow K(G, n)$ так, чтобы оно индуцировало класс α из тавтологического класса. Это отображение определено однозначно с точностью до гомотопии. Получаем отображение $H^n(X, G) \rightarrow \Pi(X, K(G, n))$. Оно взаимно однозначно.

Если имеется когомологическая операция типа (n, G, m, F) , то для любого топологического пространства X любому элементу α группы $H^n(X, G)$ сопоставляется элемент группы $H^m(X, F)$. В частности, тавтологическому элементу $\tau \in H^n(K(G, n), G)$ соотносится некоторый элемент $\sigma \in H^m(K(G, n), F)$.

Этим элементом σ наша операция полностью определяется. Действительно, любому X и любому $\alpha \in H^n(X, G)$ в силу (11) соответствует отображение $\tilde{\alpha} : X \rightarrow K(G, n)$, индуцирующее класс α из тавтологического. В силу функториальности, результат нашей когомологической операции, примененной к α , должен равняться элементу, индуцированному этим отображением из класса σ . Элемент σ может быть выбран произвольно, поэтому получаем взаимно однозначное соответствие между элементами $H^m(K(G, n), F)$ и когомологическими операциями типа (n, G, m, F) .

Обычно все встречающиеся в приложениях когомологические операции обладают свойством *стабильности*.

Стабильные когомологические операции. Для $n > 0$ (или для приведенных когомологий) имеются надстроечные изоморфизмы $H^n(X, G) \simeq H^{n+1}(\Sigma X, G)$, где ΣX — надстройка над X . Если имеются когомологические операции типа (n, G, m, F) и $(n+1, G, m+1, F)$, то получаем диаграмму

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} H^n(X, G) & \rightarrow & H^m(X, F) \\ \wr & & \wr \\ H^{n+1}(\Sigma X, G) & \rightarrow & H^{m+1}(\Sigma X, F), \end{array}$$

в которой вертикальные изоморфизмы — надстроечные.

Определение 1. Стабильная когомологическая операция типа (G, q, F) — это набор когомологических операций типа (n, G, m, F) с $m - n = q$ (для всех $n > 0$), такая что для любого n и любого X соответствующая диаграмма (12) коммутативна.

Стабильные когомологические операции обладают рядом свойств, которые помогают их вычислять.

1) Стабильные когомологические операции коммутируют с точной последовательностью пары.

Для клеточной пары (X, Y) возникают точные последовательности

$$\begin{array}{ccccccc} \leftarrow & H^n(Y, G) & \leftarrow & H^n(X, G) & \leftarrow & H^n(X/Y, G) & \leftarrow & H^{n-1}(Y, G) & \leftarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \leftarrow & H^{n+q}(Y, F) & \leftarrow & H^{n+q}(X, F) & \leftarrow & H^{n+q}(X/Y, F) & \leftarrow & H^{n+q-1}(Y, F) & \leftarrow \end{array}$$

(связанные вертикальными стрелками, заданными нашей операцией). Из определений легко следует, что эта диаграмма коммутативна. Стабильность нужна только для доказательства коммутативности тех квадратов, где гомоморфизмы изменяют размерность.

2) Трансгрессивность.

Пусть есть расслоение $E \xrightarrow{\Phi} B$ с односвязной базой. Тогда есть спектральная последовательность, сходящаяся к когомологиям базы. В этой спектральной последовательности есть отображение трансгрессии. Пусть элемент $\alpha \in H^n(\Phi) \equiv E_2^{0,n}$ трансгрессивен, т.е. лежит в ядрах всех дифференциалов спектральной последовательности кроме, может быть, последнего, действующего в клетку $E^{n+1,0}$. Тогда корректно определено его отображение трансгрессии в эту клетку. Пусть φ — стабильная когомологическая операция. Тогда $\varphi(\alpha) \in H^{n+q}(\Phi)$.

Предложение 2. Если элемент α трансгрессивен, то элемент $\varphi(\alpha)$ тоже трансгрессивен и $\varphi(t(\alpha)) = t\varphi(\alpha)$, где t — отображение трансгрессии.

3) Характеризация в терминах $K(\Pi, n)$.

Имеется отображение $\Sigma K(\Pi, n) \equiv \Sigma \Omega K(\Pi, n+1) \rightarrow K(\Pi, n+1)$. Это отображение устроено следующим образом. Каждая точка пространства $\Sigma \Omega K(\Pi, n+1)$ представляется парой (t, φ) , где $t \in [0, 1]$ и $\varphi : [0, 1] \rightarrow K(\Pi, n+1)$ (причем все точки надстройки кроме двух “вершин” представляются так однозначно). Такую пару (t, φ) мы отображаем в точку $\varphi(t)$.

Возникает последовательность отображений когомологий

$$\rightarrow H^m(K(\Pi, n), F) \rightarrow H^{m-1}(K(\Pi, n-1), F) \rightarrow H^{m-2}(K(\Pi, n-2), F) \rightarrow$$

В одну сторону эта последовательность конечна, в другую бесконечна. Можно взять обратный предел этой последовательности, т.е. множество всех наборов элементов всех групп последовательности, переходящих последовательно друг в друга при отображениях.

Теорема 16. *Множество всех стабильных когомологических операций типа $(\Pi, m-n, F)$ находится во взаимно однозначном соответствии с индуктивным пределом этой последовательности.*

Это позволяет легче вычислять группы всех стабильных когомологических операций, чем теорема 1, действующая в случае произвольных операций.

Самые знаменитые когомологические операции — квадраты Стинрода. В этом случае группы Π и F равны $\mathbf{Z}_2$. (Для других групп коэффициентов тоже есть такие операции, но ими пользуются менее часто.)

Квадраты Стинрода Sq^i , $i = 0, 1, 2, \dots$, являются аддитивными гомоморфизмами

$$Sq^i : H^n(X, \mathbf{Z}_2) \rightarrow H^{n+i}(X, \mathbf{Z}_2).$$

Они обладают следующими свойствами:

$$Sq^0 = \text{Id}.$$

Если $\alpha \in H^n(X, \mathbf{Z}_2)$, то $Sq^0(\alpha) = \alpha$, $Sq^n(\alpha) = \alpha^2$ и $Sq^i(\alpha) = 0$ при $i > n$.

$Sq^1(\alpha) = \beta\alpha$, где β — гомоморфизм Бокштейна для последовательности

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathbf{Z}_4 \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow 0.$$

(Можно проверить, что β — стабильная операция.)

Предложение 3. *Операции Стинрода, если они есть, то определяются этими свойствами однозначно.*

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим расслоение Серра $E \xrightarrow{K(\mathbf{Z}_2, n-1)} K(\mathbf{Z}_2, n)$, где E — пространство путей в $K(\mathbf{Z}_2, n)$ с фиксированным началом и свободным концом (в частности, стягиваемо), а $K(\mathbf{Z}_2, n-1) = \Omega K(\mathbf{Z}_2, n)$.

Рассмотрим спектральную последовательность этого расслоения. Действие Sq^n на тавтологический элемент группы $H^n(K(\mathbf{Z}_2, n), \mathbf{Z}_2)$ известно: это возведение в квадрат. Нужно узнать действие Sq^{n-1} . Воспользуемся для этого свойством перестановочности с трансгрессией (см. Утверждение 1.) Отображение трансгрессии $(n-1)$ -мерных когомологий слоя в n -мерные когомологии базы является изоморфизмом и переводит тавтологический класс в тавтологический. Но действие Sq^{n-1} на $(n-1)$ -мерных когомологиях слоя известно: это опять-таки возведение в квадрат. В силу утверждения 1, результат этого возведения трансгрессивен, а его образ при трансгрессии в группе

$E_{2n-1}^{2n-1,0} = E_2^{2n-1,0} \simeq H^{2n-1}(K(\mathbf{Z}_2, n), \mathbf{Z}_2)$ совпадает с искомым образом тавтологического элемента группы $H^n(K(\mathbf{Z}_2, n), \mathbf{Z}_2)$ при операции Sq^{n-1} . Аналогично, действие Sq^{n-2} на $H^n(K(\mathbf{Z}, n), \mathbf{Z}_2)$ сводится к возведению в квадрат в группе $H^{n-2}(K(\mathbf{Z}, n-2), \mathbf{Z}_2)$, и т.д.

Свойства стинродовых квадратов. Справедлива следующая формула Картана для действия этих квадратов на кохомологические произведения элементов a, b кольца $H^*(\cdot, \mathbf{Z}_2)$:

$$Sq^i(ab) = Sq^i(a)b + Sq^{i-1}(a)Sq^1(b) + Sq^{i-2}(a)Sq^2(b) + \cdots + aSq^i(b).$$

Это уже довольно сложный результат.

СТРУКТУРНАЯ ТЕОРЕМА. Алгебра стабильных $(\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_2)$ -операций *мультипликативно* порождена операциями Стинрода.

(Мы рассматриваем все стабильные кохомологические операции. Такие операции можно умножать (т.е. брать их композиции), поэтому они образуют (некоммутативную) алгебру над $\mathbf{Z}_2$.

Операции вида $Sq^s Sq^t Sq^r \cdots$ порождают эту алгебру, но между ними есть соотношения, называемые соотношениями Адема:

$$Sq^s Sq^t = \sum_{r \geq 0} \binom{s-2r}{t-r-1} Sq^{s+t-r} Sq^r, \text{ если } s < 2t.$$

Этим алгебра стабильных кохомологических операций уже определяется полностью, т.е. все соотношения, которые там выполняются, вытекают из соотношений Адема.

Следовательно, в качестве аддитивного базиса можно взять так называемые допустимые последовательности $Sq^{a_1} Sq^{a_2} Sq^{a_3} \cdots$, где $a_1 \geq 2a_2$, $a_2 \geq 2a_3$, $a_3 \geq 2a_4, \dots$. Действительно, если $a_i < 2a_{i+1}$, то с помощью соотношений Адема можно заменить эту последовательность на сумму других, в которых участок $(a_i a_{i+1})$ изменен на допустимые подпоследовательности.

Рассмотрим теперь некоторые приложения операций Стинрода.

Инвариант Хопфа. Инвариант Хопфа умеет различать элементы группы $\pi_{2n-1}(S^n)$, т.е. каждому отображению $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ сопоставляется инвариант Хопфа. Его можно определить многими эквивалентными способами, вот два из них.

Можно считать, что сфероид $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ — гладкое отображение. По лемме Сарда выбираем два некритических значения. Затем берем их полные прообразы (это будут гладкие многообразия, снабженные стандартными ориентациями) и вычисляем их индекс зацепления. Это и есть первое определение инварианта Хопфа. Для $n = 2$ инвариант Хопфа принимает все целые значения.

Дадим теперь другое определение инварианта Хопфа. Рассмотрим шар D^{2n} и приклеим его к S^n по отображению его границы $S^{2n-1} \rightarrow S^n$, заданному нашим сфероидом. У полученного пространства есть кохомологии только в размерностях $0, n, 2n$, причем все три группы кохомологий с целыми коэффициентами изоморфны $\mathbf{Z}$. Поэтому квадрат образующей n -мерных кохомологий пропорционален образующей $2n$ -мерных кохомологий. Коэффициент пропорциональности и есть инвариант Хопфа.

Задача 10. Доказать, что эти два определения инварианта Хопфа совпадают.

Теорема 17. *Если $n \neq 2^k$, то не существует отображений с нечетным инвариантом Хопфа.*

Действительно, рассмотрим инвариант Хопфа по модулю 2. Нечетность целочисленного инварианта Хопфа означала бы, что возведение в степень — изоморфизм n -мерных и $2n$ -мерных коомологий с коэффициентами в $\mathbf{Z}_2$. Из соотношений Адема следует, что если $n \neq 2^k$, то Sq^n разлагается в сумму композиций коомологических операций Sq^i с $i < n$, а все такие операции на n -мерных коомологиях нашего пространства $S^n \cup D^{2n}$ тождественно равны нулю.