Задачи по комплексному анализу 10, 07.6.2011–21.6.2011

Напомним (листок 13 по дифференциальным уравнениям), что гипергеометрическая функция Гаусса $F(a,b;c;z)$ задается сходящимся при $|z|<1$ рядом Валлиса-Эйлера $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$, где $(a)_n := a(a+1)\dots(a+n-1)$, $(a)_0 := 1$, и удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера $z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2}+(c-(a+b+1)z)\frac{dF}{dz}-abF=0$, имеющему на сфере Римана 3 регулярные особые точки: $z=0,1,\infty$; а также задается интегралом Эйлера $B(b,c-b)F(a,b;c;z)=\displaystyle\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt$, где $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}b>0$, а $B(b,c-b)$ — бета-функция Эйлера (см. листок 3); это следует из разложения бинома $(1-zt)^{-a}$ и почленного интегрирования.

1. Докажите, что (если ряд сходится) $F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$.

2. Докажите (ср. задачу 3б листка 13 по дифференциальным уравнениям), что
a) если $c\notin\mathbb{Z}$, то второе решение дифференциального уравнения Эйлера в окрестности $z=0$ равняется $z^{1-c}F(1+a-c,1+b-c;2-c;z)$; b) если $c-a-b\notin\mathbb{Z}$, то одно решение дифференциального уравнения Эйлера в окрестности $z=1$ равняется $F(a,b;1+a+b-c;1-z)$, а второе $(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;1+c-a-b;1-z)$; c) если $a-b\notin\mathbb{Z}$, то одно решение дифференциального уравнения Эйлера в окрестности $z=\infty$ равняется $z^{-a}F(a,1+a-c;1+a-b;z^{-1})$, а второе $z^{-b}F(b,1+b-c;1+b-a;z^{-1})$.

3. Более общо (ср. задачу 5в листка 13 по дифференциальным уравнениям), произвольное дифференциальное уравнение второго порядка на сфере Римана с регулярными особенностями в $z=0,1,\infty$ имеет вид $\frac{d^2P}{dz^2}+\frac{(1-\alpha-\alpha')-(1+\beta+\beta')z}{z(1-z)}\frac{dP}{dz}+\frac{\alpha\alpha'-(\alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma')z+\beta\beta'z^2}{z^2(1-z)^2}P=0$, где $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$. Его решение обозначается $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z\end{pmatrix}$ (гипергеометрическая функция Римана). Докажите, что
a) $z^{\delta}(1-z)^{\varepsilon}P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\alpha+\delta & \beta-\delta-\varepsilon & \gamma+\varepsilon & \\ \alpha'+\delta & \beta'-\delta-\varepsilon & \gamma'+\varepsilon & z\end{pmatrix}$; b) $F(a,b;c,z)=P\begin{pmatrix}0 & a & 0 & \\ 1-c & b & c-a-b & z\end{pmatrix}$.

4. Пусть $\pi:\ \mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ — накрытие Галуа сферы Римана с координатой z сферой Римана с координатой x, ветвящееся в точках $z=0,1,\infty$ с индексами ветвления ν_0,ν_1,ν_∞, с группой Галуа Γ. Докажите, что a) $\Gamma_3=\mathfrak{A}_4$ (тетраэдр) отвечает $(\nu_0,\nu_1,\nu_\infty)=(3,2,3)$; b) $\Gamma_4=\mathfrak{S}_4$ (октаэдр) отвечает $(\nu_0,\nu_1,\nu_\infty)=(3,2,4)$; c) $\Gamma_5=\mathfrak{A}_5$ (икосаэдр) отвечает $(\nu_0,\nu_1,\nu_\infty)=(3,2,5)$; d) $\Gamma=\mathfrak{I}_n$ (диэдр) отвечает $(\nu_0,\nu_1,\nu_\infty)=(2,2,n)$; e) Других конечных подгрупп в $SL(2,\mathbb{C})$, кроме циклических и прообразов этих при $SL(2,\mathbb{C})\to PGL(2,\mathbb{C})=\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1,x)$, не бывает. f) x как (многозначная) функция от z является отношением двух решений дифференциального уравнения $\dfrac{d^2P}{dz^2}+\dfrac{1}{z}\dfrac{dP}{dz}+\dfrac{-\frac{1}{\nu_0^2}-\frac{z^2}{\nu_\infty^2}+(1-\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_0^2}+\frac{1}{\nu_\infty^2})z}{4z^2(z-1)^2}P=0$, т.е. двух ветвей P-функции Римана при $\alpha=\frac{1}{2\nu_0}$, $\beta=\frac{1}{2\nu_\infty}$, $\gamma=\frac14$, $\alpha'=-\frac{1}{2\nu_0}$, $\beta'=-\frac{1}{2\nu_\infty}$, $\gamma'=\frac34$.

5. Если допустить бесконечную группу Галуа $\Gamma_\infty=PSL(2,\mathbb{Z})$, и обозначить переменную x через τ, то получим $\pi_\infty(\tau)=j(\tau)$, $\nu_0=3$, $\nu_1=2$, $\nu_\infty=\infty$. Таким образом, $(\mathbb{P}^1,z)=\widehat{\Gamma_\infty\backslash H}$ (компактификация фактора верхней полуплоскости с помощью каспа). Конечные группы Галуа $\Gamma_{3,4,5}$ из 4abc являются факторами Γ_∞, а потому π_∞ пропускается через $\pi_{3,4,5}$. Точнее, докажите, что a) для $N=3,4,5$ имеем $(\mathbb{P}^1,x_N)=\widehat{\Gamma(N)\backslash H}$ и $\Gamma_N\simeq PSL(2,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, а также группа диэдра $\mathfrak{I}_3\simeq PSL(2,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ и соответствующее накрытие $(\mathbb{P}^1,x)$ изоморфно $\widehat{\Gamma(2)\backslash H}$; b) $x_4=\mathfrak{q}^{1/4}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathfrak{q}^{n^2+n}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathfrak{q}^{n^2}}=\frac{\theta_{10}(0,\tau)}{\theta_{00}(0,\tau)}$; c) $x_5=\mathfrak{q}^{1/5}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathfrak{q}^{(5n^2-3n)/2}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathfrak{q}^{(5n^2-n)/2}}=-\mathfrak{q}^{1/5}\frac{\theta_{11}(2\tau,5\tau)}{\theta_{10}(\tau,5\tau)}$; d) $x_3=(1+i)\frac{-\xi+(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)\xi+2}$, где $\xi=-6\mathfrak{q}^{1/3}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\mathfrak{q}^{(3n^2+3n)/2}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(6n+1)\mathfrak{q}^{(3n^2+n)/2}}$.

6. Пусть $[x_1:x_2]$ — однородные координаты на $(\mathbb{P}^1,x)$, и на них линейно действует $\widetilde{\Gamma}\subset SL(2,\mathbb{C})$ (прообраз Γ при $SL(2,\mathbb{C})\to PGL(2,\mathbb{C})$). Докажите, что кольцо полиномиальных функций $\mathbb{C}[x_1,x_2]^{\widetilde{\Gamma}}$ от x_1,x_2, инвариантных относительно $\widetilde{\Gamma}$, порождается следующими функциями со следующими соотношениями: a) для $\Gamma_5:$ $F_\infty=x_1x_2(x_1^{10}+11x_1^5x_2^5-x_2^{10})$, $F_0=228(x_1^{15}x_2^5-x_1^5x_2^{15})-(x_1^{20}+x_2^{20})-494x_1^{10}x_2^{10}$, $F_1=(x_1^{30}+x_2^{30})+522(x_1^{25}x_2^5-x_1^5x_2^{25})-1005(x_1^{20}x_2^{10}+x_1^{10}x_2^{20})$, $F_1^2+F_0^3=1728F_\infty^5$; b) для $\Gamma_4:$ F_∞^2, F_1F_∞, F_0, где $F_\infty=x_1x_2(x_1^4-x_2^4)$, $F_0=x_1^8+14x_1^4x_2^4+x_2^8$, $F_1=x_1^{12}-33x_1^8x_2^4-33x_1^4x_2^8+x_2^{12}$ и $F_\infty^2(F_0^3-108F_\infty^4)=(F_1F_\infty)^2$; c) для $\Gamma_3:$ F_0^3, F_0F_∞, F_1, где $F_1=x_1x_2(x_1^4-x_2^4)$, $F_0=x_1^4+2\sqrt{-3}x_1^2x_2^2+x_2^4$, $F_\infty=x_1^4-2\sqrt{-3}x_1^2x_2^2+x_2^4$

и $F_0^3(F_0^3 - 12\sqrt{-3}F_1^2) = (F_0F_\infty)^3$; d) для диэдра при четном n : F_∞^2, F_1^2, $F_1F_0F_\infty$ и $(F_1F_0F_\infty)^2 = F_1^2F_\infty^2(F_1^2 - F_\infty^n)$, где $F_1 = (x_1^n + x_2^n)/2$, $F_0 = (x_1^n - x_2^n)/2$, $F_\infty = x_1x_2$; при нечетном n : F_∞^2, $F_1^2F_\infty$, F_1F_0 и $(F_1F_0)^2F_\infty^2 = (F_1^2F_\infty)(F_1^2F_\infty - F_\infty^{n+1})$.

Во всех случаях $z = \mathrm{const}\cdot F_0^{\nu_0}/F_\infty^{\nu_\infty}$, $F_1 = \mathrm{const}\cdot\{F_0, F_\infty\} := \mathrm{const}\cdot\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_1}\frac{\partial F_\infty}{\partial x_2} - \frac{\partial F_\infty}{\partial x_1}\frac{\partial F_0}{\partial x_2}\right)$, и при $X := F_0F_\infty/F_1$ имеем $x_2 = \sqrt{X(x_1, x_2)/X(x, 1)}$, $x_1 = xx_2$.