Задачи по комплексному анализу 9, 24.5.2011–07.6.2011

1. Рассмотрим функции $\varphi(s) := \zeta(s)\zeta(s+1)$ и $\Phi(s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s)$. Докажите, что a) $\Phi(s) = \Phi(-s)$; b) $\Phi(s)$ имеет полюс второго порядка в $s = 0$, причем $\Phi(s) + \frac{1}{2s^2}$ голоморфна в нуле; c) $\Phi(s)$ имеет простой полюс с вычетом $\zeta(2)/2\pi = \pi/12$ в $s = 1$; d) $\Phi(s)$ имеет простой полюс с вычетом $-\pi/12$ в $s = -1$; e) $\Phi(s)$ ограничена в полуполосах $\sigma \le \mathrm{Re}(s) \le \sigma',\ \mathrm{Im}(s) \ge \varepsilon > 0$.

2. Докажите, что a) $\varphi(s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{m^{-1}}{(mn)^s}$; b) Ряд с теми же коэффициентами по $q = \exp(2\pi i\tau)$ равняется $f(\tau) = \sum_{m,n=1}^{\infty} m^{-1}q^{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}(q^n)^m) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log(1-q^n)$. Таким образом, $f(\tau) = \frac{\pi i\tau}{12} - \log(\eta(\tau))$, где $\eta(\tau) = q^{1/24}\prod_{n\ge1}(1-q^n)$; c) $\Phi(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(it)t^s\frac{dt}{t}$ при $\mathrm{Re}(s) > 1$;
d) $f(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi(s)(\tau/i)^{-s}ds$ при $\sigma > 1,\ \mathrm{Im}\,\tau > 0$.

3. Перенося в последнем интеграле прямую параллельно в $\mathrm{Re}(s) = -\sigma$, докажите, что a) $f(\tau) = \frac{\pi i}{12\tau} - \frac{\pi\tau}{12i} + \frac{1}{2}\log(\tau/i) + \frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \Phi(s)(\tau/i)^{-s}ds$; b) ввиду функционального уравнения для $\Phi(s)$, $\log\eta(-1/\tau) = \log\eta(\tau) + \frac{1}{2}\log(\tau/i)$; c) $q\prod_{n\ge1}(1-q^n)^{24}$ является модулярной формой веса 12.

Это рассуждение А.Вейля (следуя Э.Гекке).

4. В задаче 1 надо знать вычет ζ-функции в $s = 1$. Докажите, что a) $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s)$, где $\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s)$, а $\phi_n(s) := \displaystyle\int_n^{n+1} (n^{-s} - t^{-s})dt$; b) $|\phi_n(s)| \le \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}\,s+1}}$; c) Ряд $\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s)$ абсолютно и равномерно сходится на компактах в области $\mathrm{Re}\,s \ge \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. d) Вычислите $\zeta(0)$.