Задачи по комплексному анализу 1, 1 февраля 2011

1. Пусть f — голоморфная функция в области D, а γ — замкнутая кривая в D. Докажите, что $\int\limits_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z)dz$ — чисто мнимое комплексное число.

2. Пусть f — голоморфная функция в области D и $|f(z) - 1| < 1$, а γ — замкнутая кривая в D. Докажите, что $\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)dz}{f(z)} = 0$.

3. Пусть $P(z)$ — многочлен. Докажите, что $\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=R} P(z)d\bar{z} = -R^2 P'(a)$.

4. Целая (на всей плоскости) функция $f(z)$ удовлетворяет неравенству $|f(z)| < |z|^{2011}$ для всех достаточно больших по модулю z. Докажите, что $f(z)$ — многочлен, степень которого не превышает 2011.

5. Существует ли такая голоморфная функция $f(z)$, что все ее производные в некоторой точке a удовлетворяют неравенству $|f^{(n)}(a)| > n!n^n$?

6. Внутри открытого прямоугольника Π нарисована буква W. Известно, что функция f непрерывна внутри Π и голоморфна всюду вне буквы W. Докажите, что она голоморфна всюду внутри Π.

7. А существует ли функция f, голоморфная в области $\Pi \setminus W$, которую нельзя непрерывно продолжить на Π?

8. Вычислите интегралы (против часовой стрелки): a) $\int\limits_{|z-2|+|z+2|=6} \exp(\frac{1}{1-z})\frac{dz}{z}$; b) $\int\limits_{|z|=3} \sin\frac{z}{z+1}dz$; c) $\int\limits_{|z|=4} \frac{z^3dz}{\exp(z^2)-1}$; d) $\int\limits_{|z|=2} \frac{2}{z^3(z^{10}-2)}$.

9. Вычислите интегралы: a) $\int\limits_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$, $a > 1$; b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$; c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx$, $a \in \mathbb{R}$; d) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx$, $a \in \mathbb{R}$; e) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 kx}{x^2}dx$, $k > 0$; f) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx$; g) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ax)}{1+\exp(x)}dx$, $0 < a < 1$.

10. Докажите, что a) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{200}$; b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^p}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{(p+1)\pi}{2n}}$, если p — четное число между 0 и $2n-2$. Если же p — нечетное число между 0 и $2n-2$, то интеграл равен 0.

11. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в полосе $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{4}$, удовлетворяет там неравенству $|f(z)| < 1$ и обращается в нуль в точке $z = 0$. Докажите, что $\left|\frac{f(z)}{\tan z}\right| \le 1$ в этой полосе.

12. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Известно, что $|f(z)| < 1$ и что f обращается в нуль в точках $z_1, \ldots, z_n$. Докажите, что $|f(z)| \le \frac{|z-z_1||z-z_2|\ldots|z-z_n|}{|z+\bar{z}_1||z+\bar{z}_2|\ldots|z+\bar{z}_n|}$.

13. Даны функции $f_1(z), \ldots, f_n(z)$, голоморфные в замыкании ограниченной области D. Докажите, что сумма $|f_1(z)| + \ldots + |f_n(z)|$ достигает максимума на границе ∂D.

Задачи по комплексному анализу 2, 15.2.2011–8.3.2011

1. Докажите теорему Руше: пусть $f(z), g(z)$ — голоморфные в области D функции; γ — граница компакта K, содержащегося в области D. Если $|f(z)| > |g(z)|$ при $z \in \gamma$, то число нулей $f(z) + g(z)$ в K равно числу нулей $f(z)$ в K. Например, если $f(z)$ голоморфна в области, содержащий круг $|z| \le 1$, и $|f(z)| < 1$ при $|z| = 1$, то уравнение $f(z) = z^n$ имеет ровно n решений в круге $|z| < 1$.

2. Пусть $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < 1$, и $f(0) = 0$. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ равномерно сходится на каждом компакте этого круга.

3. Пусть $f_n(z)$ — последовательность функций, голоморфных в области D, равномерно сходящаяся на каждом компакте к функции $f(z)$, не равной тождественно нулю. Пусть γ — граница компакта $K \subset D$, и $f(z) \neq 0$ на γ. Докажите, что a) существует N т.ч. при $n \geq N$ функции $f_n(z)$ не обращаются в нуль на γ, и число нулей f_n и f в K одинаково; b) если $f(a) = 0$, то найдется последовательность (a_n), сходящаяся к a т.ч. $f_n(a_n) = 0$.

4. Пусть $\mathrm{Im}\tau > 0$, $\mathfrak{q} = \exp(\pi i\tau)$. Докажите, что a) следующие ряды сходятся равномерно на каждом компакте $\mathbb{C}$: $\theta_0(u) := \sum_{-\infty<n<\infty} (-1)^n \mathfrak{q}^{n^2} \exp(2\pi niu)$; $\theta_1(u) := -i\sum_{-\infty<n<\infty} (-1)^n \mathfrak{q}^{(n+1/2)^2} \exp((2n+1)\pi iu)$. b) верны соотношения $\theta_0(u+1) = \theta_0(u)$; $\theta_1(u+1) = -\theta_1(u)$; $\theta_0(u+\tau) = -\mathfrak{q}^{-1}\exp(-2\pi iu)\theta_0(u)$; $\theta_1(u+\tau) = -\mathfrak{q}^{-1}\exp(-2\pi iu)\theta_1(u)$; $\theta_0(u+\frac{\tau}{2}) = i\mathfrak{q}^{-1/4}\exp(-\pi iu)\theta_1(u)$. c) $\theta_0(u), \theta_1(u)$ не равны нулю тождественно.
d) Все нули $\theta_1(u)$ — это числа вида $m + n\tau$, а все нули $\theta_0(u)$ — это числа вида $m + (n+1/2)\tau$.
e) $f(u) = \prod_{n=1}^{\infty}[(1-\mathfrak{q}^{2n-1}\exp(2\pi iu))(1-\mathfrak{q}^{2n-1}\exp(-2\pi iu))]$ является целой функцией; f) Найдите все нули функции $f(u)$; g) Докажите, что $f(u) = c\theta_0(u)$ для некоторого c.

5. Пусть a — действительное число. Докажите, что a) $\frac{\pi i \,\mathrm{sh}\, 2\pi a}{\sin\pi(z+ai)\sin\pi(z-ai)} = \sum_{-\infty<n<\infty}(\frac{1}{z+n-ai} - \frac{1}{z+n+ai})$; b) $\frac{\pi}{a}\cdot\frac{\mathrm{sh}\, 2\pi a}{\mathrm{ch}\, 2\pi a - \cos 2\pi z} = \sum_{-\infty<n<\infty}\frac{1}{(z+n)^2+a^2}$.

6. Докажите, что a) $\frac{\pi}{\cos\pi z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n-1/2)^2-z^2}$; b) $\pi\,\mathrm{tg}\,\pi z = 2z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1/2)^2-z^2}$; c) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$; d) $\cos\pi z = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2})$; e) $\cos\frac{\pi z}{4} - \sin\frac{\pi z}{4} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + \frac{(-1)^n z}{2n-1})$. (Указание: $\frac{(\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2})'}{\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin t}{\cos t}$.)

7. Числа Бернулли определяются разложением в ряд $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ ($B_3 = B_5 = \ldots = 0$). Докажите, что a) $z\,\mathrm{ctg}\,z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}B_{2k}\frac{2^{2k}z^{2k}}{(2k)!}$; b) $z\,\mathrm{ctg}\,z = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{z^2-n^2\pi^2} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{2k}}{n^{2k}\pi^{2k}}$; c) $\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k}$.

8. Докажите, что a) $\frac{d}{dz}(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}) + \frac{d}{dz}(\frac{\Gamma'(z+1/2)}{\Gamma(z+1/2)}) = 2\frac{d}{dz}(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)})$; b) $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \exp(az+b)\Gamma(2z)$ для неких a, b; c) Вычислите a, b, подставив $z = \frac{1}{2}, 1$; d) $\Gamma(pz) = (2\pi)^{-(p-1)/2}p^{pz-1/2}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{p})\ldots\Gamma(z+\frac{p-1}{p})$ для целого $p \geq 2$. (Указание: Для вычисления $\Gamma(\frac{1}{p})\Gamma(\frac{2}{p})\ldots\Gamma(\frac{p-1}{p})$ используйте $\sin\frac{\pi}{p}\cdot\sin\frac{2\pi}{p}\ldots\sin\frac{p-1}{p}\pi = \frac{p}{2^{p-1}}$.)

9. Докажите, что a) интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^x\frac{dt}{t}$ сходится равномерно на интервале $0 < a \leq x \leq b$, а потому интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^z\frac{dt}{t}$ определяет голоморфную функцию $G(z)$ в области $\mathrm{Re}(z) > 0$; b) $\displaystyle\int_0^{n}(1-\frac{t}{n})^n t^x\frac{dt}{t} = \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$ для $x \in \mathbb{R}_{>0}$ и $n \in \mathbb{N}$; c) $e^{-t}(1-\frac{e}{2n}t^2) \leq (1-\frac{t}{n})^n \leq e^{-t}$ при $0 \leq t \leq n$; d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n}(1-\frac{t}{n})^n t^x\frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} e^{-t}t^x\frac{dt}{t}$; e) $G(z) = \Gamma(z)$ при $\mathrm{Re}(z) > 0$; f) Определите вычеты $\Gamma(z)$ в полюсах $0, -1, -2, \ldots$.

10. a) Докажите, что если $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2z^2 + a_4z^4 + \ldots + a_{2n}z^{2n} + \ldots$ — разложение Лорана функции $\wp(z)$ в нуле, то все a_{2n} можно выразить как полиномы от a_2, a_4. b) Вычислите явно a_6, a_8.

11. Докажите, что если P — параллелограмм периодов (фундаментальная область) функции $\wp(z)$, а α, β — любые числа, то функция $\wp'(z) - \alpha\wp(z) - \beta$ имеет в P ровно 3 нуля, и их сумма лежит в решетке Ω; b) Если $u, v \in \mathbb{C}$ т.ч. $u \pm v \notin \Omega$, то можно найти такие α, β, что нули $\wp'(z) - \alpha\wp(z) - \beta$ равны $u, v, -u-v$; c) Если $u + v + w = 0$, то $\begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix} = 0$.

−6. Найдите ошибку в следующем выводе (верного!) равенства $-\frac{B_k}{k} = \zeta(1-k) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}$: Так как $(\frac{d}{dt})^{k-1}\exp(nt)|_{t=0} = n^{k-1}$, то

$$\zeta(1-k) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\exp(nt)\bigg|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\exp(nt)\bigg|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{1-\exp(t)} - 1\right)\bigg|_{t=0} =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{1-\exp(t)}\right)\Big|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\left(-\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\right)\Bigg|_{t=0} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{B_n}{n}\right)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\Bigg|_{t=0} =$$

$$= -\frac{B_k}{k}.$$

Полезно знать, что $B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_{10} = \frac{5}{66}, \ldots$

Задачи по комплексному анализу 3, 8.3.2011–1.4.2011

1. Рассмотрим функцию $f(z)$, определенную в верхней полуплоскости H равенством $u = f(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, где интеграл берется вдоль некоторого пути, соединяющего 0 и z, и $0 < k < 1$. Выбрана однозначная ветвь квадратного корня, равная 1 при $t = 0$. Положим $K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, $K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ (интегралы по действительной оси). Докажите, что a) функция $f(z)$ может быть непрерывно продолжена на замкнутую полуплоскость $\overline{H} := \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. b) Продолженная функция определяет отображение $\overline{H}$ на прямоугольник с вершинами $-K, K, K+iK', -K+iK'$, осуществляющее изоморфизм внутренностей. c) Определите, какие точки действительной оси переходят в вершины прямоугольника. d) Обратное преобразование $z = \operatorname{sn}(u)$ (эллиптический синус) можно продолжить до двоякопериодической функции с периодами $4K, 2iK'$ в плоскости переменного u (принцип симметрии). e) Вычислите нули и полюса $\operatorname{sn}(u)$. f) Если $\tau = iK'/K$, то найдется константа A т.ч. $\operatorname{sn}(u) = A\theta_1(\frac{u}{2K})/\theta_0(\frac{u}{2K})$, где $\tau = \frac{iK'}{K}$.

2. Докажите, что a) функция $g(z) = \int_0^z t^{-2/3}(1-t)^{-2/3}dt$ отображает H на равносторонний треугольник со стороной $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\Gamma^3(\frac{1}{3})$. b) функция $h(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ отображает единичный круг на квадрат со стороной $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2(\frac{1}{4})$. c) функция $a(z) = \int_0^z (1-t^2)^{-1/3}(1+t^2)^{-2/3}dt$ отображает единичный круг на ромб с углом $60°$ и со стороной $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{1}{6})$. d) функция $b(z) = \int_0^z \frac{dt}{(1-t^n)^{\frac{2}{n}}}$ отображает единичный круг на правильный n-угольник со стороной $\frac{2}{\pi n}\Gamma^2(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{n-2}{n})\sin^2\frac{\pi}{n}$. e) функция $c(z) = \int_0^z \frac{(1+t^5)^{2/5}}{(1-t^5)^{4/5}}dt$ отображает единичный круг на правильную пятиконечную звезду.

3. Докажите, что изоморфизм двух прямоугольников, переводящий вершины в вершины, и голоморфный внутри, обязательно линеен.

4. Докажите, что функция Жуковского $w =$Ж$(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ осуществляет изоморфизм a) дополнения к единичному кругу на дополнение к отрезку $[-1,1]$. b) Внешности окружности S_α, проходящей через точки ± 1 и пересекающей действительную ось под углом α, на дополнение к дуге окружности $S_{2\alpha}$, проходящей через точки ± 1 и пересекающей действительную ось под углом 2α (имеется в виду дуга, лежащая в верхней полуплоскости). При этом изоморфизме полумесяц, заключенный между S_α и близкой окружностью, касающейся S_α в точке 1, переходит в соплю, болтающуюся на дуге $S_{2\alpha}$ и напоминающую по форме профиль крыла самолета.

5. Постройте изоморфизм a) верхней полуплоскости и верхней полуплоскости, из которой удален отрезок $[0,i]$. b) верхней полуплоскости и верхней полуплоскости, из которой удален отрезок $[0,i]$ и луч $[2i,\infty i]$. c) Внутренности правой половины лемнискаты $r^2 = 2a^2\cos 2\phi$ и единичного круга. d) Области $|z-3| > 9,\ |z-8| < 16$ и кольца между кругами $\rho < |w| < 1$ (заодно найдите ρ).

6. Для вычисления сторон в задаче 2 необходима бета-функция Эйлера $\mathrm{B}(a,b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. Докажите, что a) $\mathrm{B}(a,b) = \int_0^\infty \frac{y^a}{(1+y)^{a+b}}\frac{dy}{y}$ (подстановкой $x = \frac{y}{1+y}$). b) $\Gamma(a)/t^a = \int_0^\infty y^a e^{-ty}\frac{dy}{y}$ (подстановкой $x = ty$), а стало быть, $\Gamma(a+b)/(1+t)^{a+b} = \int_0^\infty y^{a+b}e^{-(1+t)y}\frac{dy}{y}$. c) $\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{t^a}{(1+t)^{a+b}}\frac{dt}{t} = \int_0^\infty t^a\frac{dt}{t}\int_0^\infty y^{a+b}e^{-(1+t)y}\frac{dy}{y} = \int_0^\infty y^{a+b}e^{-y}\frac{dy}{y}\int_0^\infty t^a e^{-ty}\frac{dt}{t} = \int_0^\infty y^{a+b}e^{-y}\frac{\Gamma(a)}{y^a}\frac{dy}{y} = \Gamma(a)\int_0^\infty y^b e^{-y}\frac{dy}{y} = \Gamma(a)\Gamma(b)$, то есть $\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Задачи по комплексному анализу 4, 5.4.2011–19.4.2011

Напомним основные свойства преобразования Фурье $\mathcal{F}f(y) := \int_{-\infty}^\infty f(x)\exp(-2\pi i yx)dx$ из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ в себя.

A. Обратное преобразование $\check{\mathcal{F}}$ задается формулой $\check{\mathcal{F}}g(x) := \int_{-\infty}^\infty g(y)\exp(2\pi i yx)dy$.

B. Эти преобразования продолжаются (по непрерывности, той же формулой) до изометрий из $L^2(\mathbb{R})$ в себя (формула Планшереля).

C. Операторы сдвига $S_b f(x) := f(x+b)$ и умножения на характер $M_a f(x) := \exp(2\pi i a x)f(x)$ коммутируют следующим образом: $S_b M_a = \exp(2\pi i ab)M_a S_b$ (т.е. порождают действие группы Гейзенберга), $\mathcal{F}S_a\mathcal{F}^{-1} = M_a$, $\mathcal{F}M_a\mathcal{F}^{-1} = S_{-a}$.

D. Операторы дифференцирования $Df(x) := f'(x)$ и умножения $\chi f(x) := 2\pi i x f(x)$ коммутируют так: $\mathcal{F}D\mathcal{F}^{-1} = \chi$, $\mathcal{F}\chi\mathcal{F}^{-1} = -D$, $\check{\mathcal{F}}D\check{\mathcal{F}}^{-1} = -\chi$, $\check{\mathcal{F}}\chi\check{\mathcal{F}}^{-1} = D$.

1. Докажите, что непрерывный линейный оператор $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ т.ч. $A\chi = \chi A$, обязательно является оператором умножения на бесконечно дифференцируемую функцию.

2. Пусть $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ — обобщенные функции умеренного роста, т.е. непрерывные линейные функционалы на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Например, $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni g \mapsto g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) : g(f) = \langle g, f\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$. Еще: $\delta(f) = \langle \delta, f\rangle := f(0)$, $\langle \mathrm{sign}(x), f\rangle := \int_0^\infty f(x)dx - \int_{-\infty}^0 f(x)dx$, $\langle \mathrm{step}(x), f\rangle := \int_0^\infty f(x)dx$, $(x \pm i0)^{-1}(f) := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x \pm i\varepsilon}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx + \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x)}{x}dx\right) \mp \pi i f(0)$. Все непрерывные операции над (быстроубывающими) функциями (например, дифференцирование или преобразование Фурье) индуцируют по сопряженности одноименные операции над обобщенными функциями. Например, $\mathcal{F}g(f) := g(\mathcal{F}f)$, $g'(f) := -g(f')$. Вычислите преобразования Фурье от следующих обобщенных функций: a) $g(x) \equiv 1$; b) $\delta^{(k)}$ (k-я производная дельта-функции); c) $\mathrm{step}(x-a)$; d) $\mathrm{sign}(x)$;
e) x^k; f) $|x|^{2k+1}$; g) $x^{2k}\mathrm{sign}(x)$; h) $(x+i0)^{-1}$; i) $\cos ax^2$; j) $\frac{1}{x^2-r^2\pm i0} := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x^2-r^2\pm i\varepsilon}$; k) $|x^2-a^2|$.

3. Вычислите преобразования Фурье следующих обобщенных функций: a) $\mathrm{sign}(\sin ax)$; b) $\mathrm{sign}(\cos ax)$; c) $|\sin ax|$.

4. Вычислите с помощью формулы суммирования Пуассона a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{n^2+a^2}$; b) $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(n+a)^2}$; c) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

5. Фиксируем τ т.ч. $\mathrm{Im}\tau > 0$. Для целой функции $\phi(z)$ положим $S_b\phi(z) := \phi(z+b)$, $M_a\phi(z) := \exp(\pi i a^2\tau + 2\pi i a z)\phi(z + a\tau)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Докажите, что a) $S_b M_a = \exp(2\pi i ab)M_a S_b$, т.е. эти операторы задают действие группы Гейзенберга H. b) Эти операторы являются изометриями относительно нормы $\|\phi\|^2 := \int_{\mathbb{C}}\exp\left(\frac{-2\pi y^2}{\mathrm{Im}\,\tau}\right)|\phi(x+iy)|^2 dxdy$, т.е. определены на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, состоящем из целых функций с конечной нормой. c) Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда $Bf(z) := \int_{\mathbb{R}}\exp\left(\frac{-\pi i(z-x)^2}{\tau}\right)f(x)dx \in \mathcal{H}$.

d) оператор $B: \ L^2(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}$ сплетает действия группы Гейзенберга, т.е. $BS_b = S_bB, \ BM_a = M_aB, \ a,b \in \mathbb{R}$. e) оператор cB является изометрией для некоторой константы c и вычислите c. g) оператор cB является изоморфизмом (т.е. сюръективен).

Задачи по комплексному анализу 5, 12.4.2011–26.4.2011

1. Напомним, что $\theta(z,\tau) = \theta_{00}(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i(n^2\tau + 2nz))$,
$\theta_1(z,\tau) = \theta_{11}(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[(n+\frac{1}{2})^2\tau + 2(n+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2})])$ (нечетная по z функция),
$\theta_0(z,\tau) = \theta_{01}(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i(n^2\tau + 2n(z+\frac{1}{2})) = \theta(z+\frac{1}{2},\tau)$,
$\theta_{10}(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i[(n+\frac{1}{2})^2\tau + 2(n+\frac{1}{2})z]) = \theta_{11}(z-\frac{1}{2},\tau)$. Докажите, что
a) $\frac{d^2 \log\theta_{11}(\tau z,\tau)}{dz^2} - \frac{d^2 \log\theta_{11}(z,\frac{-1}{\tau})}{dz^2} = c(\tau)$ (не зависит от z); b) $\theta_{11}(z,\frac{-1}{\tau}) = \alpha_1(\tau)\exp(\beta(\tau)z^2 + \gamma(\tau)z)\theta_{11}(\tau z,\tau)$; c) из нечетности θ_{11} следует $\gamma(\tau) \equiv 0$, а из совпадения мультипликаторов левой и правой части при $z \mapsto z+1$ и $z \mapsto z+\tau$ следует $\beta(\tau) = \pi i\tau$; таким образом, $\theta_{11}(z,\frac{-1}{\tau}) = \alpha_1(\tau)\exp(\pi i\tau z^2)\theta_{11}(\tau z,\tau)$;
d) аналогично, $\theta(z,\frac{-1}{\tau}) = \alpha_0(\tau)\exp(\pi i\tau z^2)\theta(\tau z,\tau)$.

2. Докажите, что a) преобразование Фурье функции $f(x) = \exp(-\pi a x^2)$ равняется $\mathcal{F}f(y) = a^{-1/2}\exp(-\pi y^2/a)$; b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi a n^2) = a^{-1/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi n^2/a)$.

3. Докажите, что a) в обозначениях первой задачи для τ чисто мнимого $\alpha_0(iy) = \sqrt{y}$, а стало быть, $\theta(z,\frac{-1}{\tau}) = \sqrt{\tau/i}\exp(\pi i\tau z^2)\theta(\tau z,\tau)$; b) $\theta_{01}(z,\frac{-1}{\tau}) = \sqrt{\tau/i}\exp(\pi i\tau z^2)\theta_{10}(\tau z,\tau)$;
c) $\theta_{01}(\tau z,\tau) = \sqrt{i/\tau}\exp(-\pi i\tau z^2)\theta_{10}(z,\frac{-1}{\tau})$; d) $\theta_{11}(z,\frac{-1}{\tau}) = -i\sqrt{\tau/i}\exp(\pi i\tau z^2)\theta_{11}(\tau z,\tau)$, короче говоря, $\theta_{\delta\varepsilon}(z,\frac{-1}{\tau}) = (-i)^{\delta\varepsilon}\sqrt{\tau/i}\exp(\pi i\tau z^2)\theta_{\varepsilon\delta}(z\tau,\tau)$; e) $\theta_{1\varepsilon}(z,\tau+1) = \exp(\pi i/4)\theta_{1\varepsilon}(z,\tau)$; f) $\theta_{0\varepsilon}(z,\tau+1) = \theta_{0,1-\varepsilon}(z,\tau)$.

4. Докажите, что группа дробно-линейных преобразований $SL(2,\mathbb{Z})$ порождена преобразованиями $S(\tau) = -1/\tau, \ T(\tau) = \tau+1$, причем $S^2 = (ST)^3 = 1$.

5. Докажите, что для тэта-констант $\theta_{00}(\tau) := \theta_{00}(0,\tau), \ \theta_{01}(\tau) := \theta_{01}(0,\tau), \ \theta_{10}(\tau) := \theta_{10}(0,\tau)$ выполняется следующее свойство модулярности: пусть $f(\tau) = \theta_{00}^8(\tau) + \theta_{01}^8(\tau) + \theta_{10}^8(\tau)$. Тогда $f(\tau) = (c\tau+d)^{-4}f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$ для любой матрицы из $SL(2,\mathbb{Z})$.

Задачи по комплексному анализу 6, 19.4.2011–10.5.2011

1. Докажите, что a) $\theta(x,it)$ (для вещественных x,t) удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t}\theta(x,it) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(x,it)$; b) $\lim_{t\to 0}\theta(x,it) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n$ (сумма δ-функций в целых точках). Короче, $\theta(x,it)$ является фундаментальным решением уравнения теплопроводности на окружности $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

2. a) Сколько нулей у функции $f(lz,\tau)$, где $0 \neq f(z,\tau) \in V_l$, на эллиптической кривой $E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau$? b) Где именно находятся нули функции $\theta_{a,b}(lz,\tau), \ a,b \in \frac{1}{l}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$? c) Упорядочим как-нибудь все эти $\theta_{a,b}$: $\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_{l^2-1}$, и рассмотрим вектор $(\theta_0(lz,\tau),\ldots,\theta_{l^2-1}(lz,\tau))$. Докажите, что он никогда не обращается в нуль, и тем самым корректно определено отображение $\varphi_l : \ E_\tau \to \mathbb{P}^{l^2-1}, \ z \mapsto [\theta_0(lz,\tau) : \ldots : \theta_{l^2-1}(lz,\tau)]$. d) Докажите, что φ_l — вложение. e) Пусть группа $\frac{1}{l}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\oplus\frac{1}{l}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ действует на E_τ сдвигами: $(a,b)(z) := z + \frac{a\tau+b}{l}$. Докажите, что можно отождествить $\mathbb{P}^{l^2-1}$ с $\mathbb{P}(V_l)$ так, что действие конечной группы Гейзенберга H_l на V_l задает действие ее фактора по центру $\frac{1}{l}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\oplus\frac{1}{l}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ на $\mathbb{P}^{l^2-1}$, относительно которого вложение φ_l эквивариантно: $(a,b)\varphi_l(z) = \varphi_l((a,b)(z))$. f) Докажите, что образ $\varphi_2(E_\tau) \subset \mathbb{P}^3$ высекается уравнениями $\theta_{00}^2(z)\theta_{00}(0)^2 = \theta_{01}(z)^2\theta_{01}(0)^2 + \theta_{10}(z)^2\theta_{10}(0)^2, \ \theta_{11}^2(z)\theta_{00}(0)^2 = \theta_{01}(z)^2\theta_{10}(0)^2 - \theta_{10}(z)^2\theta_{01}(0)^2$.

3. Выведите из задачи 3 листочка 5, что a) функция $f(\tau) := \left(\frac{\partial\theta_{11}(z,\tau)}{\partial z}|_{z=0}\right)^8$ является модулярной формой веса 12, т.е. $f(\tau) = (c\tau+d)^{-12}f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})$; b) функция $g(\tau) := (\theta_{00}(0,\tau)\theta_{01}(0,\tau)\theta_{10}(0,\tau))^8$ тоже является модулярной формой веса 12. c) Докажите, что $\frac{\partial\theta_{11}(z,\tau)}{\partial z}|_{z=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\pi(2n+1)(-1)^{n+1}\exp(\pi i\tau(n+\frac{1}{2})^2)$ стремится к нулю при $\tau = it \to i\infty$. d) Докажите, что $g(it) \to 0$ при $it \to i\infty$. e) Мы скоро докажем, что с точностью до пропорциональности есть единственная модулярная форма Δ веса 12, зануляющаяся в бесконечности. Таким образом, $\frac{\partial\theta_{11}(z,\tau)}{\partial z}|_{z=0} = c\theta_{00}(0,\tau)\theta_{01}(0,\tau)\theta_{10}(0,\tau)$ для некоторой константы c. Вычислите первые три члена в разложении по $\mathfrak{q} = e^{\pi i\tau}$ обеих частей и докажите, что $c = -\pi$ (формула Якоби).

4. Докажите тождество $\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2} = \prod_{n\in\mathbb{N}}(1-q^{2n})\prod_{n\geq 0}(1+q^{2n+1})^2$.

Задачи по комплексному анализу 7, 10.5.2011–24.5.2011

1. Докажите, что a) если $k>1$ — натуральное число, то $G_{2k}(\tau) := \sum_{(m,n)\neq(0,0)}(m\tau+n)^{-2k}$ абсолютно сходится и является модулярной формой веса $2k$; b) $G_{2k}(i\infty) = 2\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}B_{2k}\pi^{2k}$ (см. задачу 7 листочка 2); c) $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n+\tau)^{-k} = \frac{1}{(k-1)!}(-2\pi i)^k\sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1}q^m$ (напомним, что $q=\exp(2\pi i\tau)$); d) Если обозначить через $\sigma_k(n)$ сумму k-ых степеней всех натуральных делителей n, и перенормировать ряд Эйзенштейна $E_{2k}(\tau) := \frac{1}{2\zeta(2k)}G_{2k}(\tau)$, то $E_{2k}(\tau) = 1-\frac{4k}{B_{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n$. Например, $E_4 = 1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n$, $E_6 = 1-504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n$, $E_8 = 1+480\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_7(n)q^n$, $E_{10} = 1-264\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_9(n)q^n$, $E_{12} = 1+\frac{65520}{691}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{11}(n)q^n$, $E_{14} = 1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{13}(n)q^n$. e) $E_4^2 = E_8$, $E_4E_6 = E_{10}$; f) $\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(m)\sigma_3(n-m)$, $11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5040\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(n)\sigma_5(n-m)$.

2. Докажите, что a) если $E_{2k}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nq^n$, то найдутся постоянные A, B такие, что $An^{2k-1}\leq |a_n|\leq Bn^{2k-1}$; b) если $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}a_nq^n$ — модулярная форма веса $2k$, то $|f(\tau)|y^k$ (где $\tau = x+iy$) инвариантна относительно $SL(2,\mathbb{Z})$; c) если же $f(\tau)$ — *параболическая* форма, то существует константа M такая, что $|f(\tau)|\leq My^{-k}$; d) $a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x+iy)q^{-n}dx \ \Rightarrow\ |a_n|\leq My^{-k}\exp(2\pi ny)$, в частности, при $y=1/n$, получаем $|a_n|\leq e^{2\pi}Mn^k$, т.е. $a_n = O(n^k)$. Это теорема Гекке.

3. Рассмотрим ряды (суммы по всем (m,n), не обнуляющимся одновременно, в указанном порядке) $G_2(\tau) := \sum_n\sum_m(m+n\tau)^{-2}$, $G(\tau) := \sum_m\sum_n(m+n\tau)^{-2}$, $H_2(\tau) := \sum_n\sum_m(m-1+n\tau)^{-1}(m+n\tau)^{-1}$, $H(\tau) := \sum_m\sum_n(m-1+n\tau)^{-1}(m+n\tau)^{-1}$. Докажите, что a) $H_2(\tau)\equiv 0$, $H(\tau) = -2\pi i/\tau$ (из формулы $(m-1+n\tau)^{-1}(m+n\tau)^{-1} = (m-1+n\tau)^{-1}-(m+n\tau)^{-1}$); b) Двойной ряд с общим членом $(m-1+n\tau)^{-1}(m+n\tau)^{-1}-(m+n\tau)^{-2} = (m+n\tau)^{-2}(m-1+n\tau)^{-1}$ сходится абсолютно, откуда $G_2-H_2 = G-H$, ряды G и G_2 сходятся, и $G_2(\tau)-G(\tau) = H_2(\tau)-H(\tau) = 2\pi i/\tau$; c) $G_2(-1/\tau) = \tau^2G(\tau)$, откуда $G_2(-1/\tau) = \tau^2G_2(\tau)-2\pi i\tau$; d) $G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3}-8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n$. e) Логарифмическая производная функции $F(\tau) := q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$ равна $\frac{dq}{q}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\right) = \frac{6i}{\pi}G_2(\tau)d\tau$. f) Логарифмические производные функций $\tau^{12}F(\tau)$ и $F(-1/\tau)$ совпадают. g) $F(\tau)$ является (единственной с точностью до множителя) параболической модулярной формой веса 12, и $\Delta(\tau) := (2\pi)^{12}2^{-6}3^{-3}(E_2^3-E_3^2) = (2\pi)^{12}q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$. Это теорема Якоби.

Если $F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}c(n)q^n$, то в усиление теоремы Гекке, $c(n) = O(n^{11/2}\sigma_0(n))$. Это гипотеза Рамануджана, доказанная Делинем.

Задачи по комплексному анализу 8, 17.5.2011–31.5.2011

1. Докажите, что a) $\theta_{00}^8(0,\tau)+\theta_{01}^8(0,\tau)+\theta_{10}^8(0,\tau) = \frac{90}{\pi^4}G_4(\tau)$;
b) $(\theta_{01}^4(0,\tau)+\theta_{00}^4(0,\tau))(\theta_{10}^4(0,\tau)+\theta_{00}^4(0,\tau))(\theta_{01}^4(0,\tau)-\theta_{10}^4(0,\tau)) = \frac{945}{\pi^6}G_6(\tau)$.

2. Докажите, что a) действие группы $\Gamma(2)$ на плоскости Лобачевского порождается преобразованиями $\tau\mapsto\tau+2$ и $\tau\mapsto\frac{\tau}{2\tau+1}$; b) В качестве фундаментальной области действия $\Gamma(2)$ на H можно взять полосу ширины 2 над двумя полуокружностями, соединяющими -1 с 0 и 0 с 1; c) $\theta_{00}^4(0,\tau)$, $\theta_{01}^4(0,\tau)$, $\theta_{10}^4(0,\tau)$ являются модулярными формами веса 2 уровня 2 (т.е. $f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^2f(\tau)$ для любого дробно-линейного преобразования из $\Gamma(2)$); d) Значения ф-ции $\lambda = -\theta_{10}^4(0,\tau)/\theta_{01}^4(0,\tau)$ в каспах таковы: $\lambda(i\infty)=0$, $\lambda(0)=\infty$, $\lambda(\pm1)=1$; e) Значения ф-ции $\mu = \theta_{00}^4(0,\tau)/\theta_{01}^4(0,\tau)$ в каспах таковы: $\mu(i\infty)=1$, $\mu(0)=\infty$, $\mu(\pm1)=0$; f) $1-\lambda=\mu$, т.е. $\theta_{10}^4(0,\tau)+\theta_{01}^4(0,\tau) = \theta_{00}^4(0,\tau)$ — тэта-соотношение Якоби.

3. Мы хотим доказать формулу тройного произведения Якоби: $\theta(z,\tau) = \prod_{m\geq1}(1-\exp(2m\pi i\tau))\cdot\prod_{n\geq0}[(1+\exp((2n+1)\pi i\tau-2\pi iz))(1+\exp((2n+1)\pi i\tau+2\pi iz))]$ (ср. задачу 4 листочка 2). Докажите, что a) произведение $P(z,\tau) := \prod_{n\geq0}[(1+\exp((2n+1)\pi i\tau-2\pi iz))(1+\exp((2n+1)\pi i\tau+2\pi iz))]$ сходится абсолютно и равномерно на компактах; b) $P(z+1,\tau) = P(z,\tau)$ и $P(z+\tau,\tau) = \exp(-\pi i\tau-2\pi iz)P(z,\tau)$; c) $\theta(z,\tau) = c(\tau)P(z,\tau)$, где $c(\tau)$ — нигде не обращающаяся в нуль голоморфная функция; d) $\theta_{00}(0,\tau) = c(\tau)\prod_{n\geq0}(1+\exp((2n+1)\pi i\tau))^2$, $\theta_{01}(0,\tau) = c(\tau)\prod_{n\geq0}(1-\exp((2n+1)\pi i\tau))^2$, $\theta_{10}(0,\tau) = 2c(\tau)\exp(\pi i\tau/4)\prod_{n\geq1}(1+\exp(2n\pi i\tau))^2$, $\theta_{11}'(0,\tau) = -2\pi c(\tau)\exp(\pi i\tau/4)\prod_{n\geq1}(1-\exp(2n\pi i\tau))^2$ (заменами

$z\mapsto z+\frac{1}{2},\ z\mapsto z+\frac{\tau}{2},\ z\mapsto z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ и замечанием $\theta'_{11}(0,\tau)=2\pi i f(0,\tau)$, если $\theta_{11}(z,\tau)=(\exp(\pi iz)-\exp(-\pi iz))f(z,\tau)$); e) $c(\tau)^2=\frac{\prod_{n\geq 1}(1-\exp(2n\pi i\tau))^2}{\prod_{n\geq 1}(1+\exp(2n\pi i\tau))^2\prod_{n\geq 0}(1-\exp((4n+2)\pi i\tau))^2}=\frac{\prod_{n\geq 1}(1-\exp(4n\pi i\tau))^2}{\prod_{n\geq 1}(1+\exp(2n\pi i\tau))^2}$ (подстановкой в формулу Якоби из задачи 3 листочка 6); f) $c(\tau)^2=\prod_{m\geq 1}(1-\exp(2m\pi i\tau))^2$, и предел при $\tau\to i\infty$ обоих выражений $c(\tau)$ и $\prod_{m\geq 1}(1-\exp(2m\pi i\tau))$ равен 1, т.е. $c(\tau)=\prod_{m\geq 1}(1-\exp(2m\pi i\tau))$, что и доказывает формулу тройного произведения.

4. Докажите, что a) $\sum_{m\in\mathbb{Z}}\mathfrak{q}^{m^2}w^{2m}=\prod_{n\geq 1}(1-\mathfrak{q}^{2n})\prod_{n\geq 0}(1+\mathfrak{q}^{2n+1}w^2)(1+\mathfrak{q}^{2n+1}w^{-2})$ (подстановкой $\mathfrak{q}=\exp(\pi i\tau),\ w=\exp(\pi iz)$); b) $\sum_{m\in\mathbb{Z}}\mathfrak{q}^{m^2}=\prod_{n\geq 1}(1-\mathfrak{q}^{2n})\prod_{n\geq 0}(1+\mathfrak{q}^{2n+1})^2$ (подстановкой $w=1$);
c) $\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-\mathfrak{q})^{m^2}=\prod_{n\geq 1}(1-\mathfrak{q}^{2n})\prod_{n\geq 0}(1-\mathfrak{q}^{2n+1})^2$ (подстановкой $w=i$).

5. Заметим, что
$\theta_{1/6,1/2}(0,3\tau)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\exp(3(m+\frac{1}{6})^2\pi i\tau+(m+\frac{1}{6})\pi i)=\exp(\pi i/6)\exp(\pi i\tau/12)\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m\exp((3m^2+m)\pi i\tau)$, а также $\theta_{1/6,1/2}(0,3\tau)=\exp(\pi i/6)\exp(\pi i\tau/12)\theta_{00}(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},3\tau)=\exp(\pi i/6)\exp(\pi i\tau/12)\prod_{n\geq 1}(1-\exp(6n\pi i\tau))\cdot\prod_{n\geq 0}(1-\exp(3(2n+1)\pi i\tau+\pi i\tau))(1-\exp(3(2n+1)\pi i\tau-\pi i\tau))=\exp(\pi i/6)\exp(\pi i\tau/12)\prod_{k\geq 1}(1-\exp(2k\pi i\tau))$.
Докажите, что a) $\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m\mathfrak{q}^{3m^2+m}=\prod_{n\geq 1}(1-\mathfrak{q}^{2n})$ (тождество Эйлера);
b) $\theta_{1/6,1/2}(0,3\tau)^{24}=\exp(2\pi i\tau)\prod_{n\geq 1}(1-\exp(2n\pi i\tau)^{24}=q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}$ (ср. задачу 3 листочка 7);
c) $\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m(2m+1)\mathfrak{q}^{m^2+m}=2\prod_{n\geq 1}(1-\mathfrak{q}^{2n})^3$
(сравнением равенств $\theta'_{11}(0,\tau)=-2\pi\exp(\pi i\tau/4)\prod_{n\geq 1}(1-\exp(2n\pi i\tau))^3$ и
$\theta'_{11}(0,\tau)=-\pi\exp(\pi i\tau/4)\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m(2m+1)\exp((m^2+m)\pi i\tau)$); d) $\theta_{1/6,1/2}(0,3\tau)^3=\frac{1}{2\pi i}\theta'_{1/2,1/2}(0,\tau)$.

40 лет назад Макдональд заметил, что $\prod_{n\geq 1}(1-\mathfrak{q}^{2n})^d$ раскладывается в ряд по $\mathfrak{q}$ с легко вычислимыми коэффициентами тогда и только тогда, когда d является размерностью простой алгебры Ли: 1,3,8,10,14,15,21...

Задачи по комплексному анализу 9, 24.5.2011–07.6.2011

1. Рассмотрим функции $\varphi(s):=\zeta(s)\zeta(s+1)$ и $\Phi(s):=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s)$. Докажите, что a) $\Phi(s)=\Phi(-s)$; b) $\Phi(s)$ имеет полюс второго порядка в $s=0$, причем $\Phi(s)+\frac{1}{2s^2}$ голоморфна в нуле; c) $\Phi(s)$ имеет простой полюс с вычетом $\zeta(2)/2\pi=\pi/12$ в $s=1$; d) $\Phi(s)$ имеет простой полюс с вычетом $-\pi/12$ в $s=-1$; e) $\Phi(s)$ ограничена в полуполосах $\sigma\leq\mathrm{Re}(s)\leq\sigma',\ \mathrm{Im}(s)\geq\varepsilon>0$.

2. Докажите, что a) $\varphi(s)=\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{m^{-1}}{(mn)^s}$; b) Ряд с теми же коэффициентами по $q=\exp(2\pi i\tau)$ равняется $f(\tau)=\sum_{m,n=1}^{\infty}m^{-1}q^{mn}=\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1}(q^n)^m)=-\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q^n)$. Таким образом, $f(\tau)=\frac{\pi i\tau}{12}-\log(\eta(\tau))$, где $\eta(\tau)=q^{1/24}\prod_{n\geq 1}(1-q^n)$; c) $\Phi(s)=\displaystyle\int_0^{\infty}f(it)t^s\frac{dt}{t}$ при $\mathrm{Re}(s)>1$;
d) $f(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Phi(s)(\tau/i)^{-s}ds$ при $\sigma>1,\ \mathrm{Im}\,\tau>0$.

3. Перенося в последнем интеграле прямую параллельно в $\mathrm{Re}(s)=-\sigma$, докажите, что a) $f(\tau)=\frac{\pi i}{12\tau}-\frac{\pi\tau}{12i}+\frac{1}{2}\log(\tau/i)+\frac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty}\Phi(s)(\tau/i)^{-s}ds$; b) ввиду функционального уравнения для $\Phi(s)$, $\log\eta(-1/\tau)=\log\eta(\tau)+\frac{1}{2}\log(\tau/i)$; c) $q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}$ является модулярной формой веса 12.
Это рассуждение А.Вейля (следуя Э.Гекке).

4. В задаче 1 надо знать вычет ζ-функции в $s=1$. Докажите, что a) $\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\phi(s)$, где $\phi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(s)$, а $\phi_n(s):=\displaystyle\int_n^{n+1}(n^{-s}-t^{-s})dt$; b) $|\phi_n(s)|\leq\frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}\,s+1}}$; c) Ряд $\phi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(s)$ абсолютно и равномерно сходится на компактах в области $\mathrm{Re}\,s\geq\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$. d) Вычислите $\zeta(0)$.

Задачи по комплексному анализу 10, 07.6.2011–21.6.2011

Напомним (листок 13 по дифференциальным уравнениям), что гипергеометрическая функция Гаусса $F(a,b;c;z)$ задается сходящимся при $|z|<1$ рядом Валлиса-Эйлера $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$,
где $(a)_n:=a(a+1)\dots(a+n-1)$, $(a)_0:=1$, и удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера

$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2}+(c-(a+b+1)z)\frac{dF}{dz}-abF=0$, имеющему на сфере Римана 3 регулярные особые точки: $z=0,1,\infty$; а также задается интегралом Эйлера $B(b,c-b)F(a,b;c;z)=\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}dt$, где $\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} b>0$, а $B(b,c-b)$ — бета-функция Эйлера (см. листок 3); это следует из разложения бинома $(1-zt)^{-a}$ и почленного интегрирования.

1. Докажите, что (если ряд сходится) $F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$.

2. Докажите (ср. задачу 3б листка 13 по дифференциальным уравнениям), что
a) если $c\notin\mathbb{Z}$, то второе решение дифференциального уравнения Эйлера в окрестности $z=0$ равняется $z^{1-c}F(1+a-c,1+b-c;2-c;z)$; b) если $c-a-b\notin\mathbb{Z}$, то одно решение дифференциального уравнения Эйлера в окрестности $z=1$ равняется $F(a,b;1+a+b-c;1-z)$, а второе $(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;1+c-a-b;1-z)$; c) если $a-b\notin\mathbb{Z}$, то одно решение дифференциального уравнения Эйлера в окрестности $z=\infty$ равняется $z^{-a}F(a,1+a-c;1+a-b;z^{-1})$, а второе $z^{-b}F(b,1+b-c;1+b-a;z^{-1})$.

3. Более общо (ср. задачу 5в листка 13 по дифференциальным уравнениям), произвольное дифференциальное уравнение второго порядка на сфере Римана с регулярными особенностями в $z=0,1,\infty$ имеет вид $\frac{d^2P}{dz^2}+\frac{(1-\alpha-\alpha')-(1+\beta+\beta')z}{z(1-z)}\frac{dP}{dz}+\frac{\alpha\alpha'-(\alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma')z+\beta\beta'z^2}{z^2(1-z)^2}P=0$, где $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$. Его решение обозначается $P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z\end{pmatrix}$ (гипергеометрическая функция Римана). Докажите, что
a) $z^\delta(1-z)^\varepsilon P\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\alpha+\delta & \beta-\delta-\varepsilon & \gamma+\varepsilon & \\ \alpha'+\delta & \beta'-\delta-\varepsilon & \gamma'+\varepsilon & z\end{pmatrix}$; b) $F(a,b;c,z)=P\begin{pmatrix}0 & a & 0 & \\ 1-c & b & c-a-b & z\end{pmatrix}$.

4. Пусть $\pi:\ \mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ — накрытие Галуа сферы Римана с координатой z сферой Римана с координатой x, ветвящееся в точках $z=0,1,\infty$ с индексами ветвления ν_0,ν_1,ν_∞, с группой Галуа Γ. Докажите, что a) $\Gamma_3=\mathfrak{A}_4$ (тетраэдр) отвечает $(\nu_0,\nu_1,\nu_\infty)=(3,2,3)$; b) $\Gamma_4=\mathfrak{S}_4$ (октаэдр) отвечает $(\nu_0,\nu_1,\nu_\infty)=(3,2,4)$; c) $\Gamma_5=\mathfrak{A}_5$ (икосаэдр) отвечает $(\nu_0,\nu_1,\nu_\infty)=(3,2,5)$; d) $\Gamma=\mathfrak{I}_n$ (диэдр) отвечает $(\nu_0,\nu_1,\nu_\infty)=(2,2,n)$; e) Других конечных подгрупп в $SL(2,\mathbb{C})$, кроме циклических и прообразов этих при $SL(2,\mathbb{C})\to PGL(2,\mathbb{C})=\operatorname{Aut}(\mathbb{P}^1,x)$, не бывает. f) x как (многозначная) функция от z является отношением двух решений дифференциального уравнения $\dfrac{d^2P}{dz^2}+\dfrac{1}{z}\dfrac{dP}{dz}+\dfrac{-\frac{1}{\nu_0^2}-\frac{z^2}{\nu_\infty^2}+(1-\frac{1}{\nu_1^2}+\frac{1}{\nu_0^2}+\frac{1}{\nu_\infty^2})z}{4z^2(z-1)^2}P=0$, т.е. двух ветвей P-функции Римана при $\alpha=\frac{1}{2\nu_0}$, $\beta=\frac{1}{2\nu_\infty}$, $\gamma=\frac14$, $\alpha'=-\frac{1}{2\nu_0}$, $\beta'=-\frac{1}{2\nu_\infty}$, $\gamma'=\frac34$.

5. Если допустить бесконечную группу Галуа $\Gamma_\infty=PSL(2,\mathbb{Z})$, и обозначить переменную x через τ, то получим $\pi_\infty(\tau)=j(\tau)$, $\nu_0=3$, $\nu_1=2$, $\nu_\infty=\infty$. Таким образом, $(\mathbb{P}^1,z)=\widehat{\Gamma_\infty\backslash H}$ (компактификация фактора верхней полуплоскости с помощью каспа). Конечные группы Галуа $\Gamma_{3,4,5}$ из 4abc являются факторами Γ_∞, а потому π_∞ пропускается через $\pi_{3,4,5}$. Точнее, докажите, что a) для $N=3,4,5$ имеем $(\mathbb{P}^1,x_N)=\widehat{\Gamma(N)\backslash H}$ и $\Gamma_N\simeq PSL(2,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, а также группа диэдра $\mathfrak{I}_3\simeq PSL(2,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ и соответствующее накрытие $(\mathbb{P}^1,x)$ изоморфно $\widehat{\Gamma(2)\backslash H}$; b) $x_4=\mathfrak{q}^{1/4}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathfrak{q}^{n^2+n}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathfrak{q}^{n^2}}=\frac{\theta_{10}(0,\tau)}{\theta_{00}(0,\tau)}$; c) $x_5=\mathfrak{q}^{1/5}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathfrak{q}^{(5n^2-3n)/2}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathfrak{q}^{(5n^2-n)/2}}=-\mathfrak{q}^{1/5}\frac{\theta_{11}(2\tau,5\tau)}{\theta_{10}(\tau,5\tau)}$; d) $x_3=(1+i)\frac{-\xi+(\sqrt3+1)}{(\sqrt3+1)\xi+2}$, где $\xi=-6\mathfrak{q}^{1/3}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\mathfrak{q}^{(3n^2+3n)/2}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n(6n+1)\mathfrak{q}^{(3n^2+n)/2}}$.

6. Пусть $[x_1:x_2]$ — однородные координаты на $(\mathbb{P}^1,x)$, и на них линейно действует $\widetilde\Gamma\subset SL(2,\mathbb{C})$ (прообраз Γ при $SL(2,\mathbb{C})\to PGL(2,\mathbb{C})$). Докажите, что кольцо полиномиальных функций $\mathbb{C}[x_1,x_2]^{\widetilde\Gamma}$ от x_1,x_2, инвариантных относительно $\widetilde\Gamma$, порождается следующими функциями со следующими соотношениями: a) для $\Gamma_5:$ $F_\infty=x_1x_2(x_1^{10}+11x_1^5x_2^5-x_2^{10})$, $F_0=228(x_1^{15}x_2^5-x_1^5x_2^{15})-(x_1^{20}+x_2^{20})-494x_1^{10}x_2^{10}$, $F_1=(x_1^{30}+x_2^{30})+522(x_1^{25}x_2^5-x_1^5x_2^{25})-1005(x_1^{20}x_2^{10}+x_1^{10}x_2^{20})$, $F_1^2+F_0^3=1728F_\infty^5$; b) для $\Gamma_4:$ F_∞^2, F_1F_∞, F_0, где $F_\infty=x_1x_2(x_1^4-x_2^4)$, $F_0=x_1^8+14x_1^4x_2^4+x_2^8$, $F_1=x_1^{12}-33x_1^8x_2^4-33x_1^4x_2^8+x_2^{12}$ и $F_\infty^2(F_0^3-108F_\infty^4)=(F_1F_\infty)^2$; c) для $\Gamma_3:$ F_0^3, F_0F_∞, F_1, где $F_1=x_1x_2(x_1^4-x_2^4)$, $F_0=x_1^4+2\sqrt{-3}x_1^2x_2^2+x_2^4$, $F_\infty=x_1^4-2\sqrt{-3}x_1^2x_2^2+x_2^4$ и $F_0^3(F_0^3-12\sqrt{-3}F_1^2)=(F_0F_\infty)^3$; d) для диэдра при четном $n:$ F_∞^2, F_1^2, $F_1F_0F_\infty$ и $(F_1F_0F_\infty)^2=F_1^2F_\infty^2(F_1^2-F_\infty^n)$, где $F_1=(x_1^n+x_2^n)/2$, $F_0=(x_1^n-x_2^n)/2$, $F_\infty=x_1x_2$; при нечетном $n:$ F_∞^2, $F_1^2F_\infty$, F_1F_0 и $(F_1F_0)^2F_\infty^2=(F_1^2F_\infty)(F_1^2F_\infty-F_\infty^{n+1})$.

Во всех случаях $z = \mathrm{const} \cdot F_0^{\nu_0}/F_\infty^{\nu_\infty}$, $F_1 = \mathrm{const} \cdot \{F_0, F_\infty\} := \mathrm{const} \cdot \left(\frac{\partial F_0}{\partial x_1}\frac{\partial F_\infty}{\partial x_2} - \frac{\partial F_\infty}{\partial x_1}\frac{\partial F_0}{\partial x_2}\right)$, и при $X := F_0 F_\infty / F_1$ имеем $x_2 = \sqrt{X(x_1, x_2)/X(x, 1)}$, $x_1 = x x_2$.

Контрольная по комплексному анализу 1, 15 февраля 2011

Вычислите следующие интегралы.

1. $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{ctg}(x - i) dx$.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + r^2} dx$.

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^a(1+x^2)}$, $0 < a < 1$.

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx$.

Контрольная по комплексному анализу 1, 15 марта 2011

Вычислите следующие интегралы.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\phi d\phi}{1 - 2p\cos 2\phi + p^2}$, $|p| < 1$.

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$.

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+r^2)} dx$, $a > 0 < r$.

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^a(1+x)}$, $0 < a < 1$.

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^2} dx$.

Контрольная по комплексному анализу 2, 23 марта 2011

1. Вычислите интеграл (через Γ-функцию) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x^n dx$, $n > 1$.

2. Вычислите бесконечную сумму (через шинус) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2+z^2}$.

3. Вычислите бесконечное произведение (через чосинус и косинус) $\displaystyle z^2 \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z^4}{4\pi^4 n^4}\right)$.

4. Найдите функцию, задающую изоморфизм круга $|w| < 1$ на плоскость с разрезом по оси OX от $z = 1$ до ∞.

5. Найдите функцию, задающую изоморфизм полуплоскости $\mathrm{Im}\, w > 0$ на внешнюю область параболы $y^2 = 4x$.

Контрольная по комплексному анализу 3, 26 апреля 2011

1. Вычислите преобразование Фурье функции, которая равна единице на отрезке $[a,b]$ и равна нулю вне этого отрезка.

2. Вычислите преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} ax}$.

3. Вычислите преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{\sin ax}{x}$.

4. Найдите сумму ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2+n^2)^2}$.

Контрольная по комплексному анализу 4, 23 мая 2011

1. Вычислите первые три ненулевых члена ряда Фурье по $\mathfrak{q} = \exp(\pi i \tau)$ функции $\lambda(\tau) = -\theta_{10}^4(0,\tau)/\theta_{01}^4(0,\tau)$.

2. Вычислите первые три члена ряда Фурье по $q = \exp(2\pi i \tau)$ функции $j(\tau) = 1728 g_2^3/\Delta = c_{-1}q^{-1} + c_0 + c_1 q + \ldots$, где $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$, а $g_2 = 60G_4,\ g_3 = 140G_6$.

3. Вычислите последние 27 цифр числа $9 \cdot 99 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot (10^{26}-1)$.

4. Найдите число решений уравнения в целых числах: a) $x_1^2 + x_2^2 = 1001$; b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1001$.

Контрольная по комплексному анализу 4, 23 мая 2011

1. Вычислите первые три ненулевых члена ряда Фурье по $\mathfrak{q} = \exp(\pi i \tau)$ функции $\frac{\partial \theta_{11}(z,\tau)}{\partial z}|_{z=0}$.

2. Пусть $(\mathbb{P}^1, x) \to (\mathbb{P}^1, z)$ накрытие Галуа с группой Галуа $\mathfrak{S}_4$, ветвящееся над точками $z = 0, 1, \infty$ с индексами ветвления $3, 2, 4$. Найдите первые три (ненулевые) члена ряда $x = c_{1/3} z^{1/3} + \ldots$, выражающего ветвь (многозначной) функции $x(z)$ в окрестности нуля.

3. Вычислите $\zeta(0)$.

4. Вычислите $\theta_{00}^{16}(0,\tau) + \theta_{01}^{16}(0,\tau) + \theta_{10}^{16}(0,\tau)$ (через ряды Эйзенштейна).

Зачет по комплексному анализу, 26 марта 2011

1. Вычислите (через Γ-функцию) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(a+b+n)}{(a+n)(b+n)}$.

2. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} \frac{\sin x}{x} dx,\ a > 0$.

3. Вычислите бесконечную сумму (через синус и тангенс) $\displaystyle\sum_{-\infty<n<\infty} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2}$.

4. Вычислите бесконечное произведение (через экспоненты z и a) $\displaystyle e^{\frac{z+a}{2}} \cdot (z-a) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{z-a}{2\pi n}\right)^2\right]$.

5. Найдите функцию, задающую изоморфизм внутренней области эллипса $4x^2 + 5y^2 = 20$ с разрезом между 1 и -1 (фокусами) на внутренность кольца $1 < |w| < A$ (и заодно найдите A).

6. Найдите функцию, задающую изоморфизм полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на плоскость с вертикальными разрезами от точек $w = n\pi$ вниз до бесконечности.

Экзамен по комплексному анализу, 26 июня 2011

1. Вычислите L-функцию Гекке $L_{G_{2k}}(s)$ ряда Эйзенштейна $G_{2k}(s)$ (через дзета-функцию Римана).

2. Вычислите первые четыре ненулевых члена ряда Фурье по $\mathfrak{q} = \exp(\pi i \tau)$ функции $\theta_{00}^4(0,\tau)/\theta_{01}^4(0,\tau)$.

3. Вычислите преобразование Фурье функции $f(x) = (\sin ax \sin bx)/x^2$ при $0 \le a \le b$.

4. Вычислите последние 27 цифр числа $9^3 \cdot 99^3 \cdot 999^3 \cdot \ldots \cdot (10^{26}-1)^3$.

5. Пусть $(\mathbb{P}^1, x) \to (\mathbb{P}^1, z)$ накрытие Галуа с группой Галуа $\mathfrak{A}_5$, ветвящееся над точками $z = 0, 1, \infty$ с индексами ветвления $3, 2, 5$. Найдите первые три (ненулевые) члена ряда $x = c_{1/3} z^{1/3} + \ldots$, выражающего ветвь (многозначной) функции $x(z)$ в окрестности нуля.

6. Выразите $j(\tau)$ через $\lambda(\tau) = -\theta_{10}^4(0, \tau)/\theta_{01}^4(0, \tau)$.