1.1. Докажите выполнение следующих *аксиом порядка* для $\mathbb{R}$:

1) $a \leqslant b,\ b \leqslant a \Longrightarrow a = b$;
2) $a \leqslant b,\ b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$;
3) для любых $a, b \in \mathbb{R}$ либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$;
4) $a \leqslant b \Longrightarrow \forall\, c \in \mathbb{R} \quad a + c \leqslant b + c$;
5) $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \Longrightarrow ab \geqslant 0$.

1.2. Дайте определение $\sqrt{2}$, докажите его существование и иррациональность.

1.3. Дайте определение a^b, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

1.4. Есть ли такие $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, что **1)** $a + b \in \mathbb{Q}$, **2)** $ab \in \mathbb{Q}$, **3*)** $a^b \in \mathbb{Q}$?

1.5. Рационально ли число $\sin 20°$?

1.6. На плоскости в точках с натуральными координатами сидят зайцы диаметром $0,001$ каждый. В начале координат стоит охотник с ружьем, стреляющим бесконечно далеко. Докажите, что под каким бы углом $\alpha \in (0°, 90°)$ к оси абсцисс он ни выстрелил, он попадет в зайца (т.е. пуля пройдет мимо центра одного из зайцев на расстоянии, меньшем радиуса зайца).

Определение 1.1. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Наименьшая из степеней таких многочленов называется *степенью* α. Действительные числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными.*

1.7* (*теорема Лиувилля*)**.** Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — иррациональное алгебраическое число степени не выше r. Покажите, что существует такое $c > 0$, что $|\alpha - p/q| > c/q^r$ для всех $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$.

1.8. Найдите такое $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, что $2^n > n^{1000}$.

1.9. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = 0$ при $a > 1$.

1.10. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}$ и $a > 1$.

1.11. Найдите такое $n \in \mathbb{N}$, что $1000^n < n!$.

1.12. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ для любого $a > 1$.

1.13. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

1.14. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

1.15. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n} = a$.
2) Покажите, что обратное неверно.

1.16. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^3+4)^8}{(2n^2+7n-9)^{12}}$; **2)** $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-2})$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$; **4)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

1.17. Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
1) Пусть $a_n < b_n$ для всех n. Верно ли, что $a < b$?
2) Пусть $a < b$. Следует ли отсюда какое-нибудь неравенство между членами последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$?
3) Пусть $a \leqslant b$. Следует ли отсюда какое-нибудь неравенство между членами последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$?