Математические основы естествознания

Предварительные задачи (для решения и обсуждения на семинаре)

1. Массивная точечная частица движется без трения по поверхности сферы. Написать функцию Лагранжа системы и найти интегралы движения. (Подсказка: выразить кинетическую энергию частицы в сферических координатах). Как результат связан с функцией Лагранжа в 3-мерном пространстве?

2. Найти действие $S(q_0, q_1; t)$ для гармонического осциллятора с лагранжианом $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\left(m\dot{q}^2 - kq^2\right)$ при движении по классической траектории от q_0 до q_1 за время t. Удовлетворяет ли ответ уравнению Гамильтона-Якоби?

3. Рассмотрим консервативную динамическую систему с каноническими координатами p_i, q_i, гамильтонианом H и скобкой Пуассона $\{\ ,\ \}$. Пусть F и G – два каких-либо интеграла движения; доказать, что $\{F, G\}$ – тоже интеграл движения.

4. На материальную точку действует сила, проекции которой на координатные оси имеют вид $F_x = 2x + y$, $F_y = x + z^2$, $F_z = 2yz + 1$. Является ли эта сила потенциальной? Если да, найти ее потенциал.

5. Найти закон движения точечной частицы массы $m = 1$ на прямой в следующих случаях:

   а) В поле потенциала $U(x) = -Ax^4$, если энергия частицы равна 0;

   б) То же для потенциала $U(x) = -Ax^3$;

   в) В поле зависящего от времени потенциала $U(x, t) = -x^3 - tx$, если при $t \to -\infty$ частица асимптотически двигалась по закону $x(t) \sim \sqrt{-t/3}$. Задача-минимум: описать качественно характер движения.

6. Цепь длиной 2 м соскальзывает с гладкого горизонтального стола. В начальный момент со стола свисал конец цепи длиной 0.5 м. Найти время соскальзывания всей цепи. Трением пренебречь.

7. Найти форму, которую принимает однородная тяжелая нерастяжимая нить с закрепленными концами.

8. Какими токами можно создать магнитное поле а) $\vec{B} = (y, 0, 0)$, б) $\vec{B} = (x, 0, 0)$?

9. Определить силу гравитационного притяжения, действующую на материальную точку единичной массы, находящуюся на расстоянии r от центра однородной сферы (или шара) массы m и радиуса R (рассмотреть случаи $r < R$ и $r > R$). Найти потенциал этой силы.

10. Решить дифференциальное уравнение $xy' + 3y = x^2$.

11. Решить задачу Коши для уравнения $u_t = u_{xxx}$ с начальным условием $u(x, 0) = \cos x$.

12. Решить задачу Коши для уравнения $u_t = -uu_x$ с начальным условием $u(x, 0) = \cos x$. При каком значении t решение теряет однозначность?

Предварительные задачи (для письменного домашнего решения)

Необходимый минимум: задачи 1– 5, 7

1. Написать функцию Лагранжа для маятника с точечной массой M на конце, точка подвеса которого (массы m) может свободно двигаться вдоль горизонтальной оси.

2. Написать уравнения движения для систем с лагранжианами

$$L_1 = -m\sqrt{\dot{x}_0^2 - \sum_i \dot{x}_i^2}, \quad L_2 = -m\sqrt{1 - \sum_i \dot{x}_i^2}, \quad L_3 = \frac{\dot{x}_0^2 - \sum_i \dot{x}_i^2}{e} + Te$$

(T, m – константы, а e – динамическая переменная) и сравнить их.

3. Рассмотрим динамическую систему с каноническими координатами p_i, q_i, гамильтонианом H (возможно, явно зависящим от времени) и скобкой Пуассона $\{\ ,\ \}$. Пусть F и G – два каких-либо интеграла движения; доказать, что $\{F, G\}$ – тоже интеграл движения.

4. Камень, лежащий на вершине гладкого полусферического купола радиуса R, получив начальную горизонтальную скорость v_0, движется под действием силы тяжести. В какой точке камень покинет купол?

5. Каким распределением зарядов можно создать электрическое поле $\vec{E} = (x, y, z)$?

6. Пусть дана некоторая выпуклая замкнутая кривая $\mathcal{C}$ на плоскости, и пусть $u(x, y)$ – функция, определенная вне области, ограниченной кривой, равная расстоянию от точки с координатами x, y до кривой. (Расстояние $d(P, \mathcal{C})$ от точки плоскости P до кривой $\mathcal{C}$ определяется как точная нижняя грань расстояний между P и точками кривой $\mathcal{C}$.) Написать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x, y)$.

7. Решить задачу Коши с начальным условием $u(x, 0) = \cos x$:

   а) для уравнения $u_t = u_{xx}$;

   б) для уравнения $u_t = -u^2 u_x$.

   Есть ли такое значение t, после которого решение теряет однозначность?

8. Найти какое-нибудь решение уравнения $u_t = -uu_x + u_{xxx}$ в виде бегущей волны $u(x, t) = f(x - ct)$.

9. Решить задачу Дирихле в верхней полуплоскости с граничным условием $\operatorname{sign} x$ (т.е. найти функцию $u(x, y)$, гармоническую в верхней полуплоскости и ограниченную на бесконечности, такую, что $u(x, 0) = \operatorname{sign} x$).