

Математические основы естествознания

Листок 1. Кинематика и динамика СТО

Список 1. Задачи для обсуждения на семинаре.

1. Найти 4 линейно-независимых изотропных вектора в 4-мерном пространстве Минковского. Можно ли выбрать их так, чтобы они были попарно ортогональны?
2. Рассмотрим вектор $\mathbf{A} = \sqrt{3}\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1$ в пространстве Минковского с сигнатурой $(1, -1, -1, -1)$ и ортонормированными базисными векторами \mathbf{e}_μ . Определить, является ли вектор \mathbf{A} пространственноподобным, времениподобным или изотропным. Чему равен угол между вектором \mathbf{A} и вектором \mathbf{e}_0 ? Сравнить с ответом в евклидовом пространстве.
3. Найти аналоги единичной сферы в пространстве Минковского с сигнатурой $(1, -1, -1, -1)$ (псевдосферы), т.е. множество векторов \mathbf{x} таких, что а) $\mathbf{x}^2 = 1$, б) $\mathbf{x}^2 = -1$.
4. Пусть имеются два события, разделенные времениподобным интервалом. Доказать, что а) существует инерциальная система отсчета (ИСО), в которой они происходят в одной и той же точке пространства, б) не существует такой ИСО, в которой они одновременны.
5. Вектор 4-скорости точечной частицы определяется как $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/d\tau$, где \mathbf{x} - 4-вектор в пространстве Минковского, задающий положение частицы, а τ - ее собственное время. Сколько независимых компонент имеет вектор 4-скорости? Найти компоненты вектора 4-скорости $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ в лабораторной ИСО для а) массивной частицы, двигающейся с постоянной скоростью \vec{v} , б) фотона, летящего в направлении оси x .
6. Вектор 4-ускорения частицы определяется как $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/d\tau$.
 - а) Доказать, что $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$.
 - б) Рассмотрим частицу, двигающуюся с (вообще говоря, переменной) скоростью \vec{v} относительно лабораторной ИСО. Назовем сопутствующей системой отсчета в момент времени t такую ИСО, в которой частица неподвижна в этот момент времени. Как связаны компоненты 4-вектора \mathbf{a} с компонентами 3-вектора \vec{a} ускорения частицы в сопутствующей системе отсчета?
7. Равноускоренным движением в релятивистской механике называется прямолинейное движение, при котором ускорение \vec{a} остается постоянным в сопутствующей системе отсчета в каждый момент времени.
 - а) Записать условие постоянства ускорения в релятивистски инвариантном виде.

- б) Написать уравнение мировой линии частицы, равноускоренно двигающейся в направлении оси x с постоянным ускорением a и нарисовать ее в виде графика на плоскости с координатами x, t . (Для простоты считать, что в начале движения скорость и координата равны 0.) Что это за кривая?
8. Назовем бустом преобразование Лоренца, не содержащее пространственных поворотов, т.е. заключающееся только в относительном движении двух систем.
- а) Написать матрицу преобразования координат и времени $(x, t) \rightarrow (x', t')$ для буста со скоростью v в направлении оси x (“элементарного буста”).
- б) Для элементарного буста из пункта а) нарисовать линии нулевого уровня $x' = 0$ и $t' = 0$ новых координат в старых координатах x, t , где оси x, t изображаются перпендикулярными прямыми. Нарисовать также семейство линий постоянного уровня $x' = X$ и $t' = T$. Что это за линии?
- в) Написать матрицу преобразования Лоренца, получающегося в результате двух последовательно произведенных бустов в направлении оси x : сначала со скоростью v_1 относительно лабораторной ИСО, а затем со скоростью v_2 относительно ИСО, в которую был произведен переход на первом шаге.
- г) Показать, что преобразование из пункта в) эквивалентно элементарному бусту в направлении оси x с некоторой скоростью V и выразить V через v_1 и v_2 . Зависит ли результат от порядка осуществления бустов? Можно ли ввести параметр $\theta(v)$ так, чтобы эти параметры складывались при композиции бустов: $\theta(V) = \theta(v_1) + \theta(v_2)$?
9. Герои фантастической повести А. и Б. Стругацких “Страна багровых туч” летят на Венеру на космическом корабле, который первую половину пути с Земли до Венеры движется равноускоренно с ускорением $g = 9.8 \text{ м/с}^2$, а вторую половину равнозамедленно, так, чтобы прибыть на Венеру с нулевой относительной скоростью. Считая для простоты, что Венера неподвижна относительно Земли, и расстояние между планетами в инерциальной системе отсчета, связанной с Землей, равно 100 млн.км., ответить на следующие вопросы.
- а) До какой максимальной скорости разгонится корабль (относительно Земли)?
- б) Сколько продлится путешествие в один конец по собственному времени корабля?
- в) Как изменятся ответы, если при расчетах пользоваться формулами релятивистской механики?
10. Частица с массой покоя m , летящая со скоростью \vec{v} , сталкивается с неподвижной частицей с массой покоя M , которая поглощает налетевшую частицу. Найти массу покоя и скорость образовавшейся составной частицы.

Математические основы естествознания

Листок 1. Кинематика и динамика СТО

Список 2. Задачи для письменного домашнего решения.

Обязательные задачи: 1, 2, 4–6, 9а.

1. В пространстве Минковского задан некоторый изотропный ненулевой вектор. Найти множество всех ортогональных ему непространственноподобных векторов.
2. Может ли сумма двух пространственноподобных векторов быть а) времениподобным вектором, б) изотропным вектором?
3. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ – две точки псевдосферы $\{\mathbf{x} : |\mathbf{x}|^2 = 1, x_0 > 0\}$, в пространстве Минковского с сигнатурой $(1, -1, -1, -1)$. Доказать, что $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \geq 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.
4. Пусть имеются два события, разделенные пространственноподобным интервалом. Доказать, что а) существует ИСО, в которой они одновременны, б) не существует такой ИСО, в которой они происходили бы в одной и той же точке пространства.
5. Выразить компоненты вектора 4-ускорения $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ в лабораторной ИСО через обычную скорость и ускорение частицы в этой же системе отсчета. Сколько независимых компонент имеет вектор 4-ускорения?
6. Тележка катится по дороге со скоростью V . По первой тележке в том же направлении со скоростью V относительно нее катится вторая тележка (меньшего размера). По второй тележке в том же направлении с той же скоростью V относительно нее катится третья тележка (еще меньшего размера) и т. д. Найти скорость n -й тележки в системе отсчета, связанной с дорогой. Есть ли у нее предел при $n \rightarrow \infty$?
7. Написать матрицу преобразования Лоренца для буста со скоростью v_x в направлении оси x относительно лабораторной ИСО, вслед за которым производится буст со скоростью v_y в направлении оси y относительно ИСО, в которую был произведен переход на первом шаге. Зависит ли результат от порядка, в котором производятся бусты?
8. Рассмотрим семейство инфинитезимальных преобразований Лоренца $L(\epsilon) = 1 + \epsilon J$, отличающихся от тождественного преобразования (обозначенного здесь символом 1) на малую величину ϵJ , где $\epsilon \rightarrow 0$ – параметр преобразования, а $J = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (L(\epsilon) - 1)$ называется генератором этого семейства преобразований.
 - а) Найти генераторы преобразований, отвечающих пространственным вращениям в плоскостях xy, xz, yz и бустам в направлениях x, y, z .
 - б) Каковы коммутационные соотношения между генераторами? Сравнить с коммутационными соотношениями для матриц Паули.

в) Пользуясь результатом, полученным в пункте б), установить связь группы Лоренца с группой $SL(2, \mathbb{C})$ комплексных унимодулярных матриц 2×2 .

9. В условиях задачи 9 из списка 1

а) Определить, на сколько отстанут часы, находящиеся на корабле, по сравнению с земными часами при возвращении, если обратный перелет будет происходить по той же схеме, что и прямой.

б) Рассчитать начальную долю массы корабля, которая может приходиться на полезный груз, в предположении, что корабль оснащен двигателями, способными превращать энергию покоя в направленное излучение с к.п.д. 100%.

10. Задача, аналогичная задаче 9 из списка 1 и задаче 10 из списка 2, но про экспедицию на ближайшую к Солнцу звездную систему α Центавра (расстояние от Солнца 4.36 световых года).

11. Может ли изолированный свободный электрон а) испустить фотон, б) поглотить фотон?