Семинар по спецфункциям. Листок 1

## Введение

Семинар рассчитан на студентов 1-4 курса, магистров, аспирантов и прочих желающих. Для понимания происходящего на семинаре и возможности решения задач требуется владение базовыми понятиями дифференциального и интегрального исчисления функции одного переменного, озвученных в средней школе и подробно изучаемых в 1 году курса математического анализа. А именно, предполагается известным:

(1) понятие предела числовых и функциональных последовательностей;
(2) неопределенный и определенный интеграл; формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F'(x) = f(x)$;
(3) комплексные числа

Желательно также знакомство со свойствами *равномерно* сходящихся последовательностей функций. Последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots,$ функций на интервале $(a,b)$ называется равномерно сходящейся к функции $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists N > 0$, так что $\forall n > N, x \in (a,b)\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Известно, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций непрерывен; такая последовательность допускает почленное интегрирование и дифференциирование (для последнего требуется также равномерная сходимость первых производных).

Далее приведен краткий словарь некоторых терминов, возможно, незнакомых первокурсникам.

1. Вещественно- или комплексно-значный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется сходящимся, если последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ частичных сумм имеет предел; ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Абсолютная сходимость ряда влечет его сходимость. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z)$, мажорируемый абсолютно сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, $|a_k(z)| \leq |c_k|$, сходится равномерно.
2. Функция $f(z)$ вещественного или комплексного аргумента $z$ называется аналитической в области $D$, если в некоторой окрестности любой точки $z_0$ области $D$ она может быть представлена сходящимя степенным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z_0)(z-z_0)^k$. Говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $z_0$ *полюс* порядка $n > 0$, если она аналитична в некоторой проколотой окрестности точки $z_0$ и существует конечный предел $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)$. В таком случае в этой проколотой окрестности функция может быть представлена сходящимся рядом Лорана $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z_0)(z-z_0)^k$. Коэффициент $a_{-1}(z_0)$ называется *вычетом* функции $f(z)$ в точке $z_0$. Если $z_0$ - *простой* полюс $(n=1)$, то вычет $\mathrm{Res}_{z_0} f(z)$ функции $f(z)$ в точке $z_0$ равен пределу $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ Функция комплексного переменного, аналитичная всюду, за исключением дискретного набора точек, где она имеет полюсы конечного порядка, называется *мероморфной*.
3. Интегралы, с которыми придется работать, как правило, будут *несобственными*. Несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ понимается как предел $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$. В случае существования такого предела говорят о сходимости несобственного интеграла. Другой вид несобственного интеграла- $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ ограничена на любом интервале $(a+\varepsilon, b)$, но неограничена на всем интервале $(a,b)$. Он также понимается как предел $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

## Задачи

1. Зная, что Γ-функция есть аналитическое решение функционального уравнения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

удовлетворяющее начальному условию $\Gamma(1) = 1$, покажите, что числа $0, -1, -2, \ldots$ являются простыми полюсами функции $\Gamma(z)$. Найдите вычеты функции $\Gamma(z)$ в этих точках.

2. а) Существует предел $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} - \log n\right)$. Этот предел положителен.
б) Докажите, что бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}$$

абсолютно сходится при любом комплексном $z$, причем эта сходимость равномерная в любой конечной части плоскости.

в) Покажите, что существует такая постоянная величина $\gamma$, что $\Gamma$-функция в представлении Вейерштрасса

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}$$

удовлетворяет функциональному уравнению $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

3. Докажите,что $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma'(1) = -\gamma$, где $\gamma = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \log n$ – постоянная Эйлера.

4. Докажите, что функция $\Phi(z) = \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ -периодическая мероморфная функция с простыми полюсами в целых точках и единичными вычетами в них; соответственно, $\Phi^{-1}(z)$ - всюду определенная периодическая функция с простыми нулями в целых точках.

5. Продолжите аналитически эйлеровский интеграл

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dz$$

с области $\operatorname{Re} z > 0$ в область $z \neq 0, 1, -2, ...$, представив это продолжение явным несобственным интегралом в каждой полосе $-(n+1) < \operatorname{Re} z < -n$, где $n = 0, 1, ....$

6. а) Выведите из интеграла Эйлера его же формулу

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} n^z$$

б) Докажите эквивалентность двух мультипликативных представлений $\Gamma$-функции: Вейерштрасса и Эйлера.

7. а) Пользуясь выражением эйлеровского интеграла $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ через отношение $\Gamma$-функций, $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$, вычислите $\Gamma(\frac{1}{2})$.

б) Вычислите объем $n$-мерного шара.

8. а) Покажите, что первая и вторая логарифмические производные $\Gamma$-функции представляются следующими рядами, абсолютно сходящимися при $z \neq 0, -1, ...$:

$$\frac{d \log \Gamma(z)}{dz} = -\gamma - \frac{1}{z} + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+n)}, \qquad \frac{d^2 \log \Gamma(z)}{dz^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

б) Покажите, что $\Gamma(x)$ - логарифмически выпуклая функция положительного вещественного аргумента, т.е., $\Gamma(x)$ - положительная непрерывная функция положительного вещественного аргумента $x$, такая, что $\log \Gamma(x)$ обладает свойством выпуклости:

$$\frac{\log \Gamma(x') - \log \Gamma(x)}{x' - x} > \frac{\log \Gamma(x'') - \log \Gamma(x)}{x'' - x}$$

для всяких положительных $x, x', x''$, таких, что $x' > x''$.

9.** Докажите, что $\Gamma(x)$ - единственное логарифмически выпуклое решение функционального уравнения $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ (здесь $x > 0$) с начальным условием $\Gamma(1) = 1$.