# Дифференциальные уравнения. Листок 1.

*Задача* 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение на прямой $\dot{x} = x^2 \sin x$. Найти все такие $x_0$, что найдется решение $\varphi$ с начальным условием $\varphi(0) = x_0$, определенное на всей прямой.

*Задача* 2. Решить логистическое уравнение

$$\dot{x} = x(1 - x)$$

и нарисовать его интегральные кривые.

*Задача* 3. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = x(1 - x) - c, \quad (c > 0).$$

Исследовать, в зависимости от параметра $c$, его неподвижные точки на устойчивость и нарисовать интегральные кривые в области $x > 0$.

*Задача* 4. Нарисовать векторные поля на плоскости и фазовые кривые системы двух уравнений

$$\dot{x_1} = x_1, \quad \dot{x_2} = ax_2$$

при $a = 0, 1, -1, 3, -3$. При каком значении параметра $a$ фазовые кривые системы являются гиперболами?

*Задача* 5. Решить уравнение $y' = 2x - y$.

*Задача* 6. Рассмотрим гладкую функцию $f$ на плоскости. Пусть $(x(t), y(t))$ есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Доказать, что функция $f(x(t), y(t))$ постоянна.

*Задача* 7. Рассмотрим гладкую функцию $f$ на плоскости. Доказать, что фазовые кривые векторного поля

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dot{y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{cases}$$

ортогональны линиям уровня функции $f$.