Метрические пространства

Задача 1. Пусть на множестве M определено расстояние $v(a,b) : M\times M \to \mathbb{R}$, обладающее всеми свойствами метрики кроме $v(a,b) = v(b,a)$. Всегда ли будут метриками выражения $v(a,b)+v(b,a)$, $\max(v(a,b), v(b,a))$, $\min(v(a,b), v(b,a))$?

Задача 2. a) Докажите, что подмножество полного метрического пространства является полным тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

b) Докажите, что замыкание подмножества полного метрического пространства изометрично его пополнению.

Задача 3. Докажите, что следующие выражения определяют метрику на прямой $\mathbb{R}$, и постройте пополнение соответствующего метрического пространства.

a) $d(x,y) = |e^x - e^y|$;

b) $d(x,y) = |\operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}(y)|$.

c^*) Интерпретируйте пределы в $\pm\infty$, а также пределы, равные $\pm\infty$, с помощью полученных метрических пространств.

d^*) Интерпретируйте пределы в ∞, а также пределы, равные ∞, с помощью аналогичного пополнения $\mathbb{R}$.

Задача 4. Докажите, что следующие выражения определяют метрику на множестве отрезков прямой $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $b > a$, и постройте пополнение соответствующего метрического пространства.

a) $d([a,b],[c,d]) = |c-a| + |d-b|$;

b) расстояние, равное длине симметрической разности отрезков.

Задача 5. Для вещественного $p \geqslant 1$ определим на множестве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ расстояние $d(f,g) = \sqrt[p]{\int\limits_0^1 |f(x)-g(x)|^p dx}$.

a) Докажите, что $d(f,g)$ — метрика.

b) Будет ли полученное метрическое пространство полным?

c) Приведите пример расходящейся последовательности функций, сходящейся поточечно.

d) Приведите пример сходящейся последовательности функций, не сходящейся поточечно.

Задача 6. a) Докажите, что если метрическое пространство X связно, то для любых элементов x, $y \in X$ и вещественного $\varepsilon > 0$ найдётся *ε-цепочка*, соединяющая x с y, то есть такой набор точек $a_1, \ldots, a_n$, что $a_1 = x$, $a_n = y$, и расстояние между a_i и a_{i+1} меньше ε для всех $1 \leqslant i < n$.

b^*) Верно ли обратное для компактных полных метрических пространств?

Задача 7*. Определим *расстояние Хаусдорфа* на компактных подмножествах в $\mathbb{R}^n$ так: $d(X,Y)$ — точная нижняя грань множества вещественных чисел $\varepsilon > 0$, таких что X содержится в ε-окрестности Y, и Y содержится в ε-окрестности X.

a^*) Докажите, что $d(X,Y)$ — метрика на множестве компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$.

b^*) Полно ли это метрическое пространство?

c^*) Компактно ли это метрическое пространство?

d^*) Докажите, что множество компактных подмножеств отрезка в $\mathbb{R}$ компактно относительно этой метрики.

e^*) Докажите, что множество компактных подмножеств компактного множества в $\mathbb{R}^n$ компактно относительно этой метрики.