Функциональные ряды

Задача 1. Сформулируйте и докажите для равномерной сходимости аналог

a) критерия Коши и мажорантного признака;

b) признаков Абеля и Дирихле (см. листок 6 за 2010 год).

Задача 2. Исследуйте на равномерную сходимость:

a) последовательность $f_n = x^n$ на $x \in [-1/2, 1/2]$ и $x \in [-1, 1]$;

b) последовательность $f_n = x^n - x^{2n}$ на $x \in [-1/2, 1/2]$ и $x \in [-1, 1]$;

c) ряд $\sum 1/(x^2 + n^2)$ на $x \in [0, 1]$ и $x \in \mathbb{R}$;

d) ряд $\sum (-1)^n/(x + n)$ на $x \in [0, 1]$ и $x \in [0, \infty)$;

e) ряд $\sum \sin(nx)/n$ на $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$ и $x \in \mathbb{R}$;

f^*) ряд $\sum \frac{nx}{(1+x)\dots(1+nx)}$ на $x \in [0, 1]$ и $x \in [1, \infty)$.

Задача 3*. Приведите пример последовательности f_n дифференцируемых функций на $[-1, 1]$, равномерно сходящихся к дифференцируемой функции f на $[-1, 1]$, для которой $f'(0) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0)$.

Задача 4. Пусть f_n — последовательность непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

a) Докажите, что если все f_n монотонны на $[a, b]$ и ряд $\sum f_n$ абсолютно сходится в концах отрезка, то этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$.

b) Пусть для каждого $x \in [a, b]$ последовательность $f_n(x)$ монотонно возрастает. Докажите, что если последовательность f_n поточечно сходится к непрерывной функции f, то эта сходимость равномерная.

Задача 5. a) Докажите, что степенной ряд с радиусом сходимости R равномерно сходится в комплексной области $|z| \leqslant r$ для любого $r < R$.

b) Докажите, что для *ряда Лорана* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ найдутся такие $0 \leqslant R_1 \leqslant R_2 \leqslant \infty$, что он абсолютно сходится при $R_1 < |z| < R_2$ и расходится при $|z| < R_1$ и $|z| > R_2$.

c) Докажите, что при этом ряд сходится равномерно в кольце $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$ для любых $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.

d) Докажите, что ряд Лорана задаёт гладкую (бесконечно дифференцируемую) функцию комплексной переменной внутри своей области сходимости.

Задача 6. a) Докажите, что если ряд $\sum a_n$ сходится, то *ряд Дирихле* $\sum \frac{a_n}{n^x}$ равномерно сходится на $x \in [0, \infty)$.

b) Какие подмножества $\mathbb{R}$ могут быть областью сходимости ряда Дирихле? Какие подмножества $\mathbb{C}$ могут быть областью абсолютной сходимости ряда Дирихле?

c) Докажите, что ряд Дирихле задаёт гладкую функцию внутри своей области абсолютной сходимости.

Определение 1. Определим *дзета-функцию Римана* $\zeta(s) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s}$.

Задача 7. a) Докажите, что ряд для $\zeta(s)$ сходится при вещественном $s > 1$ и расходится при $s \leqslant 1$

b^*) Где этот ряд сходится в комплексной области?

c) Пусть $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ — упорядоченные по возрастанию простые натуральные числа. Докажите, что при $s > 1$ выполнено $\zeta(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1-p_i^{-s}}$.

d) Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_i p_i^{-1}$?

e^*) Вычислите $\lim\limits_{s\to 1+0} (1 - s)\zeta(s)$.