

## Спецфункции Лекция 1 Г-функция

**1.** Докажите что поле разложения многочлена  $x^n - a$  содержит все корни  $n$ -ой степени из 1. **2.** Пусть  $k$  – поле характеристики не равной  $p$ , содержащее все корни из 1  $r$ ой степени и  $a$  не является  $r$ ой степенью в  $k$ . Докажите что многочлен  $x^n - a$  неразложим

**3.** В предположениях предыдущей задачи найдите примитивный элемент поля разложения многочлена  $x^p - a$ .

**4.** В предположениях задачи 2 найдите группу Галуа многочлена  $x^p - a$ .

**5.** Пусть  $\{\sigma_i\}$  – различные кольцевые отображения поля  $K$  в себя над полем  $k$ . Докажите что они линейно независимы как  $k$ -линейные эндоморфизмы  $k$ -линейного векторного пространства  $K$

**6.** В предположениях задачи 2 пусть  $k \subset K$  нормальное расширение с циклической группой Галуа порядка  $p$ . Обозначим через  $\zeta$  корень  $r$ ой степени из единицы,  $\sigma$  образующую группы Галуа. Докажите что существует  $\theta \in K$  такой, что *резольвента Лагранжа*  $(\zeta, \theta) = \theta + \zeta^{-1}\sigma(\theta) + \zeta^{-2}\sigma^2(\theta) + \dots + \zeta^{-p+1}\sigma^{p-1}(\theta)$  не равна нулю при действии группы Галуа

**7.** Вычислите действие группы Галуа на  $(\zeta, \theta)$

**8.** В предположениях задачи 6 покажите что поле  $K$  получено из  $k$  присоединением корня  $p$ -той степени из какого-то элемента поля  $k$ .