Пусть $\{x_n\}$ — последовательность действительных чисел. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $a_n = \inf\limits_{k \geqslant n} x_k$ и $b_n = \sup\limits_{k \geqslant n} x_k$. Заметим, что последовательность $\{a_n\}$ не убывает, а последовательность $\{b_n\}$ не возрастает. Следовательно, они обе имеют пределы, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ либо конечен, либо равен $+\infty$, а $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ либо конечен, либо равен $-\infty$.

Определение 3.1. Число $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\inf\limits_{k\geqslant n} x_k\right) \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ называется *нижним пределом* последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ либо $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$. Число $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{k\geqslant n} x_k\right) \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ называется *верхним пределом* последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ либо $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

3.1. Найдите нижний и верхний пределы последовательностей: **1)** $x_n = (-1)^n$; **2)** $x_n = (-1)^n n$; **3)** $x_n = (1-(-1)^n)n$; **4)** $x_n = ((-1)^n - 1)n + 1$; **5)** $x_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \sin(\pi n/4)$; **6)** $\{x_n\}$ — последовательность всех рациональных чисел на отрезке $[0,1]$, занумерованных произвольным образом.

3.2. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность действительных чисел и $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

1) для любой окрестности U точки a множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ бесконечно;
2) некоторая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ стремится к a.

Здесь под окрестностью $+\infty$ понимается любой луч вида $(c, +\infty)$, а под окрестностью $-\infty$ — любой луч вида $(-\infty, c)$, где $c \in \mathbb{R}$.

Определение 3.2. Точку $a \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, удовлетворяющую любому из эквивалентных условий предыдущей задачи, называют *частичным пределом* последовательности $\{x_n\}$.

3.3. Найдите все частичные пределы последовательностей из задачи 3.1.

3.4. Найдите все частичные пределы последовательности

$$\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n},\ldots$$

3.5. 1) Докажите, что любая числовая последовательность $\{a_n\}$ содержится в множестве частичных пределов некоторой числовой последовательности $\{x_n\}$.
2) Докажите, что если $\{a_n\}$ и $\{x_n\}$ — последовательности, связанные друг с другом как в п. 1, то множество частичных пределов последовательности $\{a_n\}$ содержится в множестве частичных пределов последовательности $\{x_n\}$.

3.6. Докажите, что нижний (соответственно, верхний) предел последовательности — это наименьший (соответственно, наибольший) из ее частичных пределов.

3.7. Докажите, что следующие свойства последовательности $\{x_n\}$ эквивалентны:

1) $\{x_n\}$ имеет предел (либо конечный, либо равный $\pm\infty$);
2) $\{x_n\}$ имеет ровно один частичный предел (либо конечный, либо равный $\pm\infty$);
3) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Отметим, что если эти условия выполнены, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

3.8. Докажите непрерывность функции $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0, +\infty)$.

3.9 (*для сдавших задачу* 1.3)**.** Докажите непрерывность и монотонность функций
1) $f(x) = a^x$ на $\mathbb{R}$, где $a > 0$; **2)** $f(x) = x^\alpha$ на $(0, +\infty)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.10. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

3.11. Найдите пределы **1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ и **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$.

3.12. 1) Верно ли, что непрерывная функция на интервале ограничена?
2) Верно ли, что непрерывная ограниченная функция на интервале достигает максимума и минимума?

3.13. Докажите, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

всюду разрывна.

3.14. Докажите, что функция Римана

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{если } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ — несократимая дробь;} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

непрерывна в иррациональных точках и разрывна в рациональных.

3.15. Докажите, что на экваторе найдутся две диаметрально противоположные точки, температура в которых одинакова.

3.16*. На сковородке лежат два блина. Докажите, что их можно разрезать одним взмахом ножа так, что каждый распадется на два куска одинаковой площади[1].

[1] Строго говоря, мы еще не знаем, что такое площадь, поэтому считайте, что блины многоугольные.