

Самостоятельная работа 1.

Записанные решения должны быть сданы СТРОГО ДО семинара по алгебре в четверг, 29 сентября.

Число N определяется каждым студентом по формуле $N = 100 * \Phi + 10 * I + O$, где
 Φ = число букв в фамилии (mod 10);
 I = число букв в имени (mod 10);
 O = число букв в отчестве (mod 10).

Если получилось, что $N < 150$, то надо заменить N на $N + 100$.

Необходимо доказывать все высказанные утверждения и приводить все вычисления. (На утверждения, доказанные в лекциях, и на задачи листочков можно ссылаться без доказательства.)

- 1) Найдите такое натуральное число $m \in [N - 3; N + 3]$, для которого кольцо \mathbb{Z}_m содержит наибольшее число нильпотентных элементов. Перечислите эти нильпотентные элементы.
- 2) Найдите такое натуральное число $n \in [N - 3; N + 3]$, для которого кольцо \mathbb{Z}_n содержит наибольшее число делителей нуля.
- 3) Для значения n из пункта 2 найдите в \mathbb{Z}_n обратимый остаток, ближайший к 120, и найдите для него обратный.
- 4) Для значения n из пункта 2 представьте каким-нибудь одним способом кольцо \mathbb{Z}_n в виде прямого произведения. Укажите явные формулы, задающие изоморфизм $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$ и обратный изоморфизм.
- 5) Для значения n из пункта 2 укажите явные формулы для изоморфизма $\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ с наибольшим возможным значением k и явные формулы для обратного изоморфизма.
- 6) Для значения n из пункта 2 укажите все решения уравнения $x^2 = 1$. (Рекомендуется воспользоваться результатом п. 5.)
- 7) Для значения n из пункта 2 укажите в кольце \mathbb{Z}_n обратимый элемент, имеющий наибольший порядок по умножению. (Рекомендуется воспользоваться результатом п. 5.)