

Математические основы естествознания

Листок 2. Электромагнитное поле

Список 1. Задачи для обсуждения на семинаре

1. Написать функции Лагранжа и Гамильтона для нерелятивистской заряженной частицы в постоянном магнитном поле $\vec{H}(x, y, z)$. Вычислить скобки Пуассона между различными компонентами обобщенного импульса и проверить тождество Якоби.
2. а) Доказать, что для электрического и магнитного полей \vec{E} , \vec{B} величины $\vec{E} \cdot \vec{B}$ и $|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2$ инвариантны относительно преобразований Лоренца.
б) Пусть постоянные электрическое и магнитное поля таковы, что $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ и $|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 < 0$. Доказать, что существует система отсчета, в которой электрическое поле равно 0.
3. Пусть в некотором постоянном электромагнитном поле угол между векторами \vec{E} и \vec{B} одинаков во всех системах отсчета. Чему равен этот угол?
4. Найти электромагнитное поле, создаваемое заряженной частицей, равномерно движущейся со скоростью v вдоль оси x .
5. Определить закон движения частицы с массой m и зарядом q в однородном электрическом поле E , направленном по оси y , если в начальный момент частица имела скорость v вдоль оси x .
6. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля определяется как $T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$. Найти дивергенцию тензора энергии-импульса электромагнитного поля (т.е. $\partial_{\nu} T^{\mu\nu}$) в отсутствие зарядов.

Математические основы естествознания

Листок 2. Электромагнитное поле

Список 2. Задачи для письменного домашнего решения

Обязательные задачи: 1–3, 5

1. Пусть постоянные электрическое и магнитное поля таковы, что $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ и $|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2 > 0$. Доказать, что существует система отсчета, в которой магнитное поле равно 0. Что можно утверждать в случае $|\vec{E}|^2 = |\vec{B}|^2$?
2. Пусть постоянные электрическое и магнитное поля таковы, что

$$\vec{E} \cdot \vec{B} + (|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2)^2 \neq 0.$$

Доказать, что существует система отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны. (Указание: рассмотреть векторы $\vec{V} = \alpha \vec{E} \times \vec{B}$ и подобрать значение параметра α .)

3. Найти магнитное поле, создаваемое током, текущим по бесконечно длинной прямой проволоке, направленной вдоль оси z .
4. Найти электромагнитное поле, создаваемое равномерно заряженной бесконечно длинной прямолинейной тонкой нитью, направленной вдоль оси y , и движущейся с постоянной скоростью v вдоль оси x . Толщиной нити пренебречь.
5. Определить закон движения частицы с массой m и зарядом q в однородном магнитном поле B , направленном по оси z , если в начальный момент частица имела скорость v вдоль оси x .
6. Найти след тензора энергии-импульса T_{μ}^{μ} электромагнитного поля.