Банаховы пространства

Определение 1. Векторное пространство над $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\|$ называется *банаховым пространством*, если оно полно относительно метрики $d(a,b) = \|b-a\|$.

Задача 1. Пусть $p \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$.

a) Докажите, что множество последовательностей $(a_1, a_2, \dots)$, для которых ряд $\sum_k |a_k|^p$ сходится, образует линейное подпространство. Обозначим его l_p.

b) Докажите, что выражение $\sqrt[p]{\sum |a_k|^p}$ определяет норму на l_p.

c) Докажите, что если последовательности образуют фундаментальную последовательность в l_p, то они сходятся поэлементно.

d) Докажите полноту l_p.

Задача 2. a) Докажите, что для последовательностей $(a_1, a_2, \dots)$ и $(b_1, b_2, \dots)$ из l_2 ряд $\sum_k a_k b_k$ сходится, и что это выражение задаёт скалярное произведение (положительно определённую билинейную симметрическую форму) в l_2.

b) Докажите, что норма в l_p при $p \neq 2$ не может быть получена из скалярного произведения посредством $\|a\|_p = \sqrt{(a,a)}$.

c^*) Докажите, что, тем не менее, для $p > 1$ выражение $\sum a_k b_k$ определяет невырожденное спаривание l_p и l_q при $1/p + 1/q = 1$.

d^*) Какой смысл можно придать предыдущему пункту для $p = 1$?

Определение 2. Банахово пространство, норма в котором получена из скалярного произведения, называется *гильбертовым пространством.*

Задача 3. a) Приведите пример некомпактного подмножества $C^1([0,1])$, которое компактно как подмножество $C([0,1])$.

b) Сформулируйте и докажите аналог критерия Арцела-Асколи для $C^k([0,1])$.

Задача 4. a) Докажите, что множество последовательностей $(a_1, a_2, \dots)$, для которых $0 \leqslant a_k \leqslant 2^k$, компактно в l_p для любого $p \geqslant 1$.

b^*) Докажите, что подмножество $K \subset l_p$ компактно тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся N, что для всех $(a_1, a_2, \dots) \in K$ выполняется $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |a_k|^p < \varepsilon$.

Определение 3. Банахово пространство называется *сепарабельным*, если оно является замыканием своего счётного подмножества.

Задача 5. Докажите, что банахово пространство несепарабельно тогда и только тогда, когда в нём найдётся несчётное множество попарно непересекающихся единичных шаров.

Задача 6. Будут ли следующие пространства сепарабельны:

a) конечномерное пространство;

b) пространство l_p;

c) пространство l_∞ ограниченных последовательностей с равномерной нормой;

d) пространство $C([0,1])$;

e) пространство $C^k([0,1])$.

Задача 7*. a^*) Докажите, что для всякого замкнутого сепарабельного собственного подпространства L гильбертова пространства найдётся вектор x, для которого $\|x\| = 1$ и расстояние от x до L равно 1. Чему при этом равно (x,y) для $y \in L$?

b^*) Приведите пример замкнутого собственного подпространства в банаховом пространстве, для которого не найдётся такого вектора.

Задача 8*. Докажите, что всякое сепарабельное гильбертово пространство изометрично посредством линейного отображения l_2.

Задача 9*. Может ли базис в банаховом пространстве быть счётным множеством?