Листок 3

Задачи, отмеченные звездочкой, нужно сдать письменно. Крайний срок сдачи всех задач (письменных и устных) — 10.10.

Задача 1. * Найдите закон движения частицы с лагранжианом

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + y.$$

Задача 2. Найдите геодезические римановой метрики

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}{y}$$

в верхней полуплоскости $y > 0$.

Задача 3. Напишите систему дифференциальных уравнений в полярных координатах, которой удовлетворяют все прямые. Точнее, пусть $x(t)$, $y(t)$ координаты точки на прямой, то есть $x(t) = a+bt$, $y(t) = c+dt$ для некоторых констант a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, таких, что $b^2 + d^2 \neq 0$. Обозначим через $r(t)$, $\phi(t)$ соответствующие полярные координаты. Напишите дифференциальные уравнения на функции $r(t)$, $\phi(t)$. *Указание:* преобразуйте евклидову метрику к полярным координатам, и запишите для преобразованной метрики уравнения Эйлера–Лагранжа.

Задача 4. * Докажите, что истинные траектории лагранжиана

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

являются подмножествами алгебраических кривых степени 2.

Задача 5. Материальная точка скользит по сфере без трения. Напишите ее лагранжиан в сферических координатах.

Задача 6. * Выпишите уравнения геодезических на параболоиде вращения $z = x^2 + y^2$.

Задача 7. Рассмотрим мыльную пленку, натянутую на некоторый контур. Предположим, что пленка однозначно проецируется на некоторую область D на плоскости xy. Таким образом, форма пленки совпадает с графиком некоторой функции $u(x, y)$. Напишите уравнение с частными производными на функцию u. *Указание:* пленка старается минимизировать площадь поверхности.

Задача 8. * Докажите, что для любых положительных R и a, геодезическими римановой метрики

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = R^2 \frac{(a^2 + x^2)\dot{y}^2 + 2xy\dot{x}\dot{y} + (a^2 + y^2)\dot{x}^2}{(a^2 + x^2 + y^2)^2}$$

являются прямые.