"Спецфункции". Тезисы 1-ой лекции.

1. Мы хотим, как и Эйлер, чтобы $n!$ было значением в точке $n+1$ некоторой "хорошей" функции $\Gamma(s)$, $n! = \Gamma(n+1)$. Это условие недостаточно сильное, усилим его, наложив на искомую функцию совместимое с ним функциональное уравнение $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Имеется два способа построить функцию, удовлетворяющую этому уравнению

2. *Первая конструкция* Г. Произведение плюс гильбертова гостиница. Для любой функции $\phi(s)$ формальное произведение $\Psi(s) = \phi(s)\phi(s+1)\cdots\phi(s+i)\cdots$ удовлетворяет соотношению

$$\Psi(s+1) = \phi(s+1)\phi(s+2)\cdots\phi(s+i)\cdots = \phi(s)^{-1}\phi(s)\phi(s+1)\cdots\phi(s+i)\cdots = \phi(s)^{-1}\Psi(s).$$

Для Г можно взять $\phi(s) = s^{-1}$. При этом произведение катастрофически расходится, iый сомножитель ведет себя как $1/i$. Для улучшения сходимости домножим на бесконечную константу $1 \times 2 \times \cdots \times i \times \cdots$. Это вполне безобидно т.к. функциональное уравнение однородно по Г. Получим обратное к произведению

$$s\left(1+\frac{s}{1}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{i}\right)\cdots.$$

К сожалению, произведение все еще расходится. В самом деле, поскольку $\log x$ - непрерывная функция в своей области определения, сходимость бесконечного произведения эквивалентна сходимости логарифма бесконечного произведения, т.е., сходимости ряда из логарифмов. Так как $\log(1+\frac{s}{n})$ эквивалентен s/n при больших n (в частности, $A\frac{|s|}{n} < |\log(1+\frac{s}{n})| < B\frac{|s|}{n}$ для некоторых положительных A и B), то ряд из логарифмов расходится так же, как и гармонический ряд $s + s/2 + \cdots + s/n$, расходящийся как $s\log(n)$. Последнее следует из сравнения интеграла от $1/x$ и соответствующих верхней и нижней интегральных сумм, отвечающих разбиению $\{1, 2, \cdots, n\}$ интервала интегрирования $[1, n]$. Для устранения этой расходимости можно применить два метода

3. 1 метод (Вейерштрасс) Разделим каждый сомножитель на экспоненту от расходящейся части логарифма сомножителя:

$$P_W(s)^{-1} = s\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{i}\right)\exp\left(-\frac{s}{i}\right)$$

4. 2 метод (Эйлер) Разделим каждое конечное произведение на экспоненту от его расходимости и после этого перейдем к пределу. Так как $1+1/2+\cdots+1/n$ расходится как $\ln(n)$, регуляризующий множитель равен $\exp(-s\log(n)) = n^{-s}$. Окончательно

$$P_E(s)^{-1} = s\lim_{N\to\infty} N^{-s}\prod_{i=1}^{N}\left(1+\frac{s}{i}\right)$$

5. Произведения $P_W(s)$ и $P_E(s)$ сходятся и даже абсолютно (в смысле абсолютной сходимости ряда из логарифмов) и даже равномерно на ограниченных областях по s (см. задача 2б, листок 1) .

6. Произведения нам были нужны для решения функционального уравнения. $P_E(s)$ удовлетворяет этому уравнению. $P_W(s)$ не удовлетворяет этому уравнению, при сдвиге выбрасывается мультипликативная константа, а уравнению удовлетворяет подправленное выражение $\Gamma_W(s) = \exp(-\gamma s)P_W(s)$ для некой константы γ (см. задача 2в, листок 1) ..

7. Эти бесконечные произведения совпадают, $\Gamma_W(s) = P_E(s)$ (см. задача 6б, листок 1). Обозначим эти равные произведения через $\Gamma(s)$. Докажите, что $\Gamma(n+1) = n!$

8. *Вторая конструкция* Г. Интеграл плюс интегрирование по частям. Область интегрирования – например, луч $(0, \infty)$ т.к. другие односвязные сводятся к этой заменой переменных (диффеоморфизмом). Для сходимости на бесконечности хорош множитель $\exp(-t)$, он же удобен для интегрирования по частям. Попробуем

$$\int_0^\infty \phi_s(t) \exp(-t) d\,t.$$

Для выполнения функционального уравнения достаточно условия $\partial\phi_{s+1}(t)/\partial t = s\phi_s(t)$ с очевидным решением $\phi_s(t) = t^{s-1}$. В итоге

$$\Gamma_E(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \exp(-t) d\,t.$$

9. Интеграл сходится при $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Для продолжения функции на область всех s воспользуемся следующим трюком:

$$\Gamma_E(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \exp(-t) d\,t = \int_0^1 t^{s-1} \exp(-t) d\,t. + \int_1^\infty t^{s-1} \exp(-t) d\,t =$$

$$\int_0^1 t^{s-1} d\,t + \int_0^1 t^{s-1}(\exp(-t) - 1) d\,t + \int_1^\infty t^{s-1} \exp(-t) d\,t =$$

$$1/s + \int_0^1 t^{s-1}(\exp(-t) - 1) d\,t + \int_1^\infty t^{s-1} \exp(-t) d\,t$$

Первый интеграл сходится уже при $\mathrm{Re}(s) > -1$; так как $\exp(-t) - 1 \sim -t$ при $t \to 0$.

Упражнение. Продолжите $\Gamma_E(s)$ в полосу $\mathrm{Re}(s) > -n$

10. Теорема. Функция $\Gamma_E(s)$, определенная эйлеровским интегралом, совпадает с эйлеровским пределом $P_E(s)$.

Набросок доказательства. Будем приближать интеграл берущимся, для чего аппроксимируем экспоненту многочленами. Это возможно лишь на конечном отрезке, поэтому в интеграле верхний предел тоже надо взять конечным:

$$\int_0^N t^{s-1} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^N dt.$$

Вычисляя интеграл по индукции, нетрудно убедится, что он равен $\frac{N!N^s}{s(s+1)\cdots(s+N)}$, так что для доказательства теоремы достаточно показать, что разность между эйлеровским интегралом и его конечным приближением стремится к нулю с ростом N. В силу абсолютной сходимости эйлеровского интеграла при $s > 0$ интеграл $\int_N^\infty t^{s-1}\exp(-t)d\,t$ стремится к нулю с ростом N, так что все сводится к оценке интеграла

$$\int_0^N \left\{ e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{N}\right) \right\} t^{s-1} dt.$$

Подставляя в неравенство $\log(1+u) > u$, где $|u| < 1$, величину $\pm t/N$ в качестве u и экспоненциируя, получаем, что при $0 < t < N$

$$\left(1 - \frac{t}{N}\right)^N < e^{-t} < \left(1 + \frac{t}{N}\right)^{-N},$$

откуда, воспользовавшись неравенством $(1-\alpha)^n > 1 - n\alpha$ при $0 < \alpha < 1$, получаем:

$$0 < e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N = e^{-t}\left\{1 - e^t\left(1 - \frac{t}{N}\right)^N\right\} < e^{-t}\left\{1 - \left(1 - \frac{t^2}{N^2}\right)^N\right\} < e^{-t}\frac{t^2}{N}.$$

Значит, оцениваемый интеграл меньше C/N, где $C = \int_0^\infty e^{-t}t^{s+1}ds$, и потому стремится к нулю с ростом N.