4.1. Найдите производную функции $f(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+100)$ в точке $x = -1$.

4.2. Найдите производные функций **1)** $\sin x$, **2)** $\cos x$, **3)** $\operatorname{tg} x$, **4)** $\operatorname{ctg} x$, **5)** $\arcsin x$, **6)** $\arccos x$, **7)** $\operatorname{arctg} x$, **8)** $\operatorname{arcctg} x$.

4.3. Пусть $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Согласно результату задачи 3.9, функция $f(x) = a^x$ непрерывна и строго монотонна на $\mathbb{R}$. Докажите, что множество ее значений есть луч $(0, +\infty)$.

Определение 4.1. Пусть $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Из предыдущей задачи и теоремы о существовании обратной функции (см. лекции) следует, что функция $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, обладает обратной функцией $f^{-1}\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, которая непрерывна и строго монотонна. Функция f^{-1} называется *логарифмом по основанию a* и обозначается $\log_a$. Вместо $\log_e$ принято писать $\ln$ и называть эту функцию *натуральным логарифмом.*

4.4. Вычислите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$; **3)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

4.5. Найдите производные функций **1)** a^x, **2)** $\log_a x$, **3)** x^α, **4)** x^x, **5)** $\ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1})$.

4.6. 1) Дайте определения правой производной $f'_+(x_0)$ и левой производной $f'_-(x_0)$.
6) Пусть f дифференцируема на $[x_0, x_0 + h)$. Верно ли, что $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+} f'(x)$?

4.7. 1) Дайте определения бесконечных производных в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, равных $+\infty$, $-\infty$ и ∞. Приведите пример ситуации, когда **2)** $f'(x_0) = +\infty$, **3)** $f'(x_0) = -\infty$, **4)** $f'(x_0) = \infty$, но $f'(x_0) \neq +\infty$ и $f'(x_0) \neq -\infty$.

4.8. Докажите, что производная четной дифференцируемой функции нечетна, а нечетной — четна.

4.9. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0, дифференцируема в x_0 и $f'(x_0) > 0$.
1) Докажите, что существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(x_0 - \delta) < f(x_0) < f(x_0 + \delta)$ при $0 < \delta < \varepsilon$.
2) Может ли предыдущее условие выполняться при $f'(x_0) < 0$? **3)** А при $f'(x_0) = 0$?

4.10. Пусть функция f строго возрастает и дифференцируема на интервале (a, b). Следует ли отсюда, что $f'(x) > 0$ всюду на (a, b)?

4.11. Пусть функция f дифференцируема на (a, b) и $f'(x_0) > 0$ для некоторого $x_0 \in (a, b)$. Верно ли, что f возрастает в некоторой окрестности x_0?

4.12. Найдите $\max_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{n}$.

4.13. Сформулируйте и докажите правило Лопиталя (см. лекции) о пределе $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, где
1) $a = \pm\infty$, $A \in \mathbb{R}$, $B = \infty$; **2)** $a \in \mathbb{R}$, $A = \pm\infty$, $B = 0$; **3)** $a = \pm\infty$, $A = \pm\infty$, $B = 0$;
4) $a \in \mathbb{R}$, $A = \pm\infty$, $B = \infty$; **5)** $a = \pm\infty$, $A = \pm\infty$, $B = \infty$.

4.14. Найдите пределы: **1)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$; **2)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$.

Определение 4.2. Пусть функция f дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Прямая $y = kx + b$ называется *касательной* к графику функции f в точке x_0, если $f(x) = kx + b + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

4.15. Докажите, что касательная к графику f, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$, задается уравнением $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

4.16. На плоскости в точке $(p/2, 0)$ находится источник света. Докажите, что лучи, выпущенные из источника, после отражения от параболического зеркала $y^2 = 2px$ распространяются параллельно друг другу.

4.17. Найдите все дифференцируемые функции y на прямой, удовлетворяющие уравнению $y' = \lambda y$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ — фиксированное число).

4.18. Пусть функция f дифференцируема на $[a, b]$. Докажите, что ее производная на $[a, b]$ принимает все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$. (*Указание:* рассмотрите частный случай, когда $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки.)