Логика и алгоритмы -2011. Задание 2

30. Постройте инъективное отображение множества X в себя, которое не является биекцией, для случаев:
а) X= **N**, б) X=$\mathbf{R}_+$ (множество положительных действительных чисел),
в) X= $\{\langle x,y\rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2+y^2 = 1\}$.

Знак · обозначает композицию отображений: $(f\cdot g)(x)=f(g(x))$
31. Пусть $f: X \to X$ - инъекция, причем $f\cdot f = f$. Докажите, что $f = 1_X$.
32. Найдите все такие многочлены $f: \mathbf{Q}\to \mathbf{Q}$ с рациональными коэффициентами, что
а) $f\cdot f = id_{\mathbf{Q}}$ и $f \neq id_{\mathbf{Q}}$, б) $f\cdot f = f$ и $f \neq id_{\mathbf{Q}}$.
33. Постройте сюръективное отображение $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, которое не является биекцией.
34. а) Докажите, что если $A\sim A'$, $B\sim B'$ и $A \cap B= A'\cap B'=\varnothing$, то $A\cup B \sim A'\cup B'$.
б) Что можно утверждать в случае, если $A\sim A'$, $B\sim B'$ и $A \cap B \neq \varnothing$?
35. Докажите, что если $A \sim A'$ и $B \sim B'$, то $A \times B \sim A'\times B'$.
36. Используя теорему Кантора - Бернштейна, докажите равномощность следующих множеств:
- а) всех интервалов различных видов на прямой,
- б) открытого и замкнутого круга на плоскости,
- в) окружности и прямой,
- г) всех сплошных прямоугольников на плоскости.

37. Докажите, что множество $\{X \mid X\subset \mathbf{N} \wedge |X|=2\}$ счетно.
38. Докажите, что множество всех интервалов в **Q** (множестве рациональных чисел) счетно.
39. Дано счетное множество A. Докажите, что в A существует счетная строго возрастающая последовательность подмножеств: $A_0 \subsetneq A_1\subsetneq\ldots\subsetneq A_n\subsetneq\ldots$, такая что все множества $A_{n+1}\setminus A_n$ бесконечны.
Знак ∘ обозначает композицию отношений: $R\circ S =\{\langle x,y\rangle \mid \exists z\, (\langle x,z\rangle \in R$ и $\langle z,y\rangle \in S)\}$.
I_X - отношение равенства на множестве X.
40. Докажите, что $(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$.
41. Докажите, что если $R\circ R= I_X$, то R функционально (т.е. является графиком некоторой функции $X \to X$).
42. Постройте множество X и отношение R на X, такое что $I_X = R\circ R^{-1}$, но R не функционально.
43. Постройте множество X и отношение R на X, такое что $R^{-1}\circ R\neq R\circ R^{-1}$.
44. Пусть R - отношение на множестве X, такое что $I_X\subset R \subset R^{-1}$ и $R\circ R\subset R$. Докажите, что R - отношение эквивалентности.
45. Пусть R - отношение на множестве X, такое что $I_X\subset R\circ R^{-1}$, $R \subset R^{-1}$ и $R\circ R\subset R$. Докажите, что R - отношение эквивалентности.
46. Какие из следующих отношений являются отношениями эквивалентности?
а) $\{\langle x,y\rangle\in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\} \mid 10(x-y)\in \mathbf{Z}\}$,
б) $\{\langle\langle x,y\rangle,\langle z,t\rangle\rangle \in (\mathbf{N}\times\mathbf{N}) \times(\mathbf{N}\times\mathbf{N}) \} \mid x+t = y+z\}$,
в) отношение параллельности на множестве всех прямых в трехмерном пространстве,
г) $\{\langle x,y\rangle\in (\mathbf{N}\times\mathbf{N}) \mid$ x и y взаимно просты$\}$,

д) $\{\langle A,B\rangle \in (\mathcal{P}(\{1,2,3\})\times\mathcal{P}(\{1,2,3\})) \mid A \cap B=\varnothing\}$,
е) $\{\langle x,y\rangle \in (\mathbf{N}\times\mathbf{N}) \mid x^2 + y^2$ четно$\}$.

$X \lesssim Y$ *обозначает, что существует инъекция X в Y*.

47. Докажите, что если $B \lesssim C$, то

а) $A^B \lesssim A^C$, б) $B^A \lesssim C^A$.

48. Докажите, что если $A \cap B = \varnothing$, то $C^{A\cup B} \sim C^A\times C^B$.
49. Докажите, что $(A\times B)^C \sim A^C \times B^C$.
50. Докажите, что $(A^B)^C \sim A^{B\times C} \sim (A^C)^B$.
51. Докажите, что $(A^2)^*\sim(A^*)^2$ (X^* обозначает множество всех конечных кортежей, составленных из элементов X).