Логика и алгоритмы -2011. Задание 1

1. Докажите следующие равенства:

а) $(A\setminus B)\setminus C = (A\setminus C)\setminus (B\setminus C) = A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$,

в) $A\setminus(B\cap C) = (A\setminus B) \cup (A\setminus C)$,

2. В кондитерском отделе магазина продаются торты и конфеты в коробках. Посетители покупают либо 1 торт, либо 1 коробку конфет, либо 1 торт и 1 коробку конфет. В течение дня продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

3. Существуют ли такие множества A,B,C, что

$A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = (A \cap B)\setminus C = \varnothing$?

4. Докажите следующие равенства:

а) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$,

б) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$,

в) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$,

г) $(E\times E)\setminus(A\times B)=((E\setminus A)\times E)\cup(E\times(E\setminus B))$ (для $A,B\subseteq E$).

5. а) Даны непустые множества A, B, такие что $A\times B = B\times A$. Докажите, что $A = B$.

б) Пусть A,B,C,D - непустые множества, такие что $(A\times B)\cup(B\times A)= C\times D$. Докажите, что $A=B=C=D$.

6. Докажите, что композиция отображений сохраняет инъективность и сюръективность.

7. Докажите, что всякое отображение множеств $f: A\to B$ можно представить в виде композиции $g\cdot h$, где g - инъекция, h - сюръекция.

8. Докажите, что

а) все замкнутые отрезки на прямой равномощны;

б) все окружности на плоскости равномощны;

в) все замкнутые шары в 3-мерном пространстве равномощны.

9. Постройте биекции:

а) между прямой **R** и открытым интервалом $]0,1[$;

б) между прямой **R** и открытым лучом $]0,+\infty[$;

в) между (сплошным) замкнутым квадратом и замкнутым кругом;

г) между открытым кругом и плоскостью.

10. Докажите для произвольных множеств A,B,C:

а) $A\times B \sim B\times A$,

б) $(A\times B)\times C \sim A\times(B\times C)$.

11. Даны множества A,B,C, такие что $A\sim B$, $A\cap B=\varnothing$, $|C|=2$. Докажите, что $A\times C\sim A\cup B$.

12. Пусть $f: A\to B$ и $g: B\to A$ - отображения, такие что $g\cdot f = 1_A$ (тождественное отображение). Докажите, что f - инъекция, а g - сюръекция.

13. Пусть $f: A\to B$ и $g: B\to A$ - отображения, такие что $g\cdot f = 1_A$ и $f\cdot g = 1_B$. Докажите, что f - биекция, а $g=f^{-1}$.

14. Пусть $f: A\to B$ - инъекция, $A \neq \varnothing$. Постройте сюръекцию $g: B\to A$, такую что $g\cdot f = 1_A$.

15. Пусть $g: B\to A$ - сюръекция. Постройте инъекцию $f: A\to B$, такую что $g\cdot f = 1_A$.

<u>Определение</u> Пусть f: $X \to Y$ - *функция.*
Для множества $U \subseteq X$ ***образом*** U ***относительно*** f *называется множество* $f(U) := \{f(x) \mid x \in U\}$.
Для множества $V \subseteq Y$ ***полным прообразом*** V ***относительно*** f *называется множество* $f^{-1}(V) := \{x \mid f(x) \in V\}$.

16. Пусть f: $X \to Y$ - функция; $A, B \subseteq Y$. Докажите утверждения:
а) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
б) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
в) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

17. Пусть f: $X \to Y$ - функция; $A, B \subseteq X$. Докажите утверждения:
а) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
б) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$,
в) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.

18. Пусть f: $X \to Y$ - инъекция; $A, B \subseteq X$. Докажите, что
а) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,
б) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

19. Пусть f: $X \to Y$ - функция, такая что $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ для всех $A, B \subseteq X$. Докажите, что f - инъекция.

20. Докажите, что график отображения равномощен источнику этого отображения.

Для отношения $R \subseteq A \times A$ положим
$pr_1 R := \{x \mid (x,y) \in R\}$,
$pr_2 R := \{y \mid (x,y) \in R\}$.

21. Найдите $pr_1 R$, $pr_2 R$ для следующих отношений R:
а) $R = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{N} \wedge y \in \mathbf{N} \wedge x \text{ делит } y\}$
б) $R = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{Z} \wedge y \in \mathbf{Z} \wedge x + y < 0\}$
в) $R = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{N} \wedge y \in \mathbf{N} \wedge 2x < 3y < 3x\}$

22. Для каких множеств A существует такое отношение $R \subseteq A \times A$, что $R^{-1} = (A \times A) \setminus R$?

23. Сформулируйте определение подпоследовательности данной последовательности f: $\mathbf{N} \to X$.

24. Пусть X - множество всех ненулевых векторов в пространстве, $\uparrow\uparrow$ - отношение сонаправленности. Установите биекцию между $X/\uparrow\uparrow$ и сферой радиуса 1.

25. Рассмотрим следующее отношение на множестве $X = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \setminus \{0\}$:
$R = \{((m,n),(m',n')) \mid mn' = nm'\}$.
а) Докажите, что R - отношение эквивалентности.
б) Постройте биекцию между X/R и $\mathbf{Q}$, исходя из определения рационального числа.

26. Рассмотрим следующее отношение на множестве $\mathbf{R}$:
$S = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid (x-y) \in \mathbf{Z}\}$.
а) Докажите, что S - отношение эквивалентности.
б) Постройте биекцию между $\mathbf{R}/S$ и единичной окружностью.

27. а) Докажите, что всякое множество сюръективно отображается на любое свое фактормножество.
б) Пусть f: $X \to Y$ - функция. Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на X:

$R=\{(x,y) \mid f(x)=f(y)\}$. Докажите, что $X/R \sim f(X)$.

28. Пусть R,S - отношения эквивалентности на множестве X.

а) Докажите, что $R\cap S$ - отношение эквивалентности.

б) Докажите, что если $R\circ S= X \times X$, то $X/(R\cap S) \sim (X/R) \times (X/S)$.

29. Постройте сюръекцию плоскости на прямое произведение двух окружностей (тор).