

Логика и алгоритмы -2011. Задание 3

52. а) Докажите, что если $A \cap B = \emptyset$, то $\mathcal{P}(A \cup B) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
б) Выведите отсюда, что $\mathbf{R} \sim \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (теорема Кантора).
53. Докажите, что $\mathbf{R} \sim \mathbf{R}^n$ для всех натуральных $n > 0$.
54. а) Докажите, что $\mathcal{P}(A)^B \sim \mathcal{P}(A \times B) \sim \mathcal{P}(B)^A$.
б) Докажите, что $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$.
55. а) Докажите, что $\mathbf{N} \times \mathbf{R} \sim \mathbf{R}$
б) Докажите, что $\mathbf{N}^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$.
56. Докажите, что $\mathbf{R}^{\mathbf{R}} \sim \mathbf{N}^{\mathbf{R}} \sim \mathcal{P}(\mathbf{R})$.
57. Докажите, что
а) множество всех конечных подмножеств множества \mathbf{N} счетно,
б) множество всех конечных подмножеств множества \mathbf{R} имеет мощность континуума,
в) множество всех счетных подмножеств множества \mathbf{R} имеет мощность континуума.
58. Существует ли множество $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{N})$ мощности континуума, такое что для всех $A, B \in X$ либо $A \subset B$, либо $B \subsetneq A$?
59. Не используя континуум-гипотезу, докажите, что если $X \subset \mathbf{R}^2$, то хотя бы одно из множеств X , $\mathbf{R}^2 \setminus X$ имеет мощность континуума.
60. Докажите, что если $A_1 \cup \dots \cup A_n = \mathbf{R}$, то хотя бы одно из множеств A_i имеет мощность континуума.
61. Докажите, что множество всех биекций из \mathbf{N} на \mathbf{N} имеет мощность континуума.
62. а) Найдите мощность множества $\{X \mid A \subset X \subset B\}$, если известно, что $|A|=m$, $|B|=n>m$, n - натуральное.
б) Найдите мощность множества $\{X \mid X \subset B, A \cap X = \emptyset\}$, если известно, что $|A|=m$, $|B|=n>m$, n - натуральное, $A \subset B$.
63. Докажите, что множество всех отображений $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ имеет мощность континуума.
64. а) Докажите, что множество всех строго возрастающих последовательностей рациональных чисел имеет мощность континуума.
б) Докажите, что множество всех строго возрастающих последовательностей действительных чисел имеет мощность континуума.
65. Докажите, что образ счетного множества при любом отображении не более чем счетен.
66. Докажите, что множество всех открытых подмножеств \mathbf{R} имеет мощность континуума.