Задачи по классическим группам 1, 26.09.2011–10.10.2011

1. Цель задач 1–4 — доказательство *взаимности И. Шура-Г. Вейля*: пусть V — векторное пространство размерности d; тогда в $V^{\otimes n}$ действует группа $GL_d \times S_n$ (т.е. действуют, перестановочно друг с другом, GL_d "диагонально" и S_n перестановками сомножителей). Утверждается, что как $GL_d \times S_n$-модуль, $V^{\otimes n}$ является прямой суммой неприводимых представлений вида $V_\lambda \boxtimes U_\lambda$ (с кратностью 1), где у λ не больше d строк. (Напомним, что если $|\lambda| = n$, то U_λ (соотв. T_λ) — соответствующее неприводимое (соотв. индуцированное) представление S_n). Более того, для различных n и λ неприводимые GL_d-представления V_λ все различны и исчерпывают все *полиномиальные* неприводимые представления GL_d (т.е. такие представления $\rho : GL_d \to GL_N$, у которых матричные коэффициенты $\rho(A)$ полиномиально зависят от матричных коэффициентов A).
Для начала разложим $V^{\otimes n}$ как S_n-модуль, и определим V_λ как кратность вхождения неприводимого представления U_λ (т.е. $V_\lambda = \mathbb{C}^{r_\lambda}$, где r_λ — кратность. Или еще $V_\lambda = \mathrm{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V^{\otimes n})$). По аналогии с групповой алгеброй, определим ассоциативную алгебру $\mathcal{A}$ как линейную оболочку в $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ операторов вида $A \otimes \ldots \otimes A,\ A \in GL(V)$. Докажите, что $\mathcal{A} = \mathrm{Sym}^n(\mathrm{End}(V)) = \bigoplus_\lambda \mathrm{End}(V_\lambda)$.

2. Докажите следующую лемму: пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра, и $\{V_i\}_{i\in I}$ — некоторый набор ее конечномерных представлений. Получается отображение $\mathfrak{A} \to \bigoplus_{i\in I} \mathrm{End}(V_i)$. Это отображение сюръективно тогда и только тогда, когда все V_i неприводимы и попарно неизоморфны.

3. Из задач 1 и 2 уже следует, что все GL_d-представления V_λ неприводимы и попарно неизоморфны. Выберем таблицу D формы λ, и пусть $e_D \in \mathbb{C}[S_n]$ — соответствующий симметризатор Юнга. Докажите, что $V_\lambda \simeq e_D \cdot V^{\otimes n}$.

4. Теперь надо проверить, что $V_\lambda \neq 0$ тогда и только тогда, когда у λ не больше d строк. Пусть число строк λ равно $k \le d$. Выберем базис $v_1, \ldots, v_d$ в V и рассмотрим тензор $v := v_1^{\otimes\lambda_1} \otimes \ldots \otimes v_k^{\otimes\lambda_k}$.
a) Докажите, что линейная оболочка $\langle \sigma v,\ \sigma \in S_n\rangle$ как S_n-модуль изоморфна T_λ. Поскольку U_λ содержится в T_λ, заключаем, что $V_\lambda \neq 0$.
b) Докажите, что как S_n-модуль $V^{\otimes n} \simeq \oplus_\mu T_\mu^{c_\mu}$, где c_μ — некоторые (ненулевые) кратности, а сумма берется по диаграммам μ, у которых не больше d строк. Отсюда заключаем, что в S_n-модуль $V^{\otimes n}$ входят только такие U_λ, у которых $\lambda \ge \mu$ для некоторого μ из предыдущей суммы.
c) Докажите, что если $\lambda \ge \mu$, то число строк λ не больше числа строк μ.

5. Пример: докажите, что $V_{(2,1)} \simeq \frac{(\mathrm{Sym}^2 V)\otimes V}{\mathrm{Sym}^3 V} \simeq \frac{(\Lambda^2 V)\otimes V}{\Lambda^3 V}$.

6. Докажите, что если $n \le d$, то $\mathrm{End}_{GL_d}(V^{\otimes n}) \simeq \mathbb{C}[S_n]$.

7. *Характер* полиномиального представления $\rho : GL_d \to GL_N$ — это функция χ_ρ на GL_d со значениями $\chi_\rho(A) := \mathrm{Tr}(\rho(A))$.
a) Докажите, что $\chi_\rho(A)$ зависит лишь от собственных значений $x_1, \ldots, x_d$ матрицы A и является симметрической функцией переменных $x_1, \ldots, x_d$.
b)* Попробуйте вывести из соответствия Шура-Вейля и формулы Фробениуса, что характер χ_λ представления V_λ задается функцией Шура s_λ от переменных $x_1, \ldots, x_d$. Для начала надо понять, в какую операцию над представлениями GL_d переводит соответствие Шура-Вейля умножение Литтлвуда-Ричардсона.

8. Цель задач 8–10 — обсуждение задачи 7b). Итак, мы хотим вычислить характер χ_λ представления V_λ группы $GL_d = GL(V)$.
a) Пусть $\lambda = (n)$, т.е. $V_\lambda = \mathrm{Sym}^n V$. Докажите, что $\chi_{(n)} = h_n(x_1, \ldots, x_d)$ (полная симметрическая функция).
b) Пусть $\lambda = (1, \ldots, 1)$, т.е. $V_\lambda = \Lambda^n V$. Докажите, что $\chi_{(1,\ldots,1)} = e_n(x_1, \ldots, x_d)$ (элементарная симметрическая функция).

9. Пусть U — произвольное представление симметрической группы S_n. Положим $\mathbb{S}_U(V) = \mathrm{Hom}_{S_n}(U, V^{\otimes n})$ (*полиномиальный функтор*). Например, $\mathbb{S}_{U_\lambda}(V) = V_\lambda$. Пусть U' (соотв. U'') — представление S_n (соотв. S_m). Докажите, что $\mathbb{S}_{U'}(V) \otimes \mathbb{S}_{U''}(V) = \mathbb{S}_{U'\star U''}(V)$, где $U' \star U'' = \mathrm{Ind}_{S_n\times S_m}^{S_{n+m}}(U' \boxtimes U'')$ — произведение Литтлвуда-Ричардсона.

10. Теперь выведите из задач 8,9 утверждение задачи 7b), а также докажите, что $\dim V_\lambda = \prod_{1\le i<j\le d} \frac{\lambda_i-\lambda_j+j-i}{j-i} = \prod \frac{d-i+j}{h_{ij}}$. Второе произведение берется по всем клеткам с координатами (i,j) диаграммы Юнга λ, а h_{ij} — длина крюка клетки с координатами (i,j).

11. Пусть $N^\nu_{\lambda\mu}$ — структурные константы умножения Литтлвуда-Ричардсона, т.е. $U_\lambda \star U_\mu = \oplus_\nu U_\nu^{N^\nu_{\lambda\mu}}$. Пусть $C^\nu_{\lambda\mu}$ — структурные константы (внутреннего) тензорного умножения, т.е. $U_\lambda \otimes U_\mu = \oplus_\nu U_\nu^{C^\nu_{\lambda\mu}}$.
a) Докажите, что $C^{(n)}_{\lambda\mu} = 1$, если $\mu = \lambda$, и 0 иначе; $C^{(1,\dots,1)}_{\lambda\mu} = 1$, если $\mu = \lambda^*$ (транспонированная диаграмма Юнга), и 0 иначе.
b) Докажите, что $\mathbb{S}_{U_\nu}(V\oplus W) = \oplus (V_\lambda \otimes W_\mu)^{N^\nu_{\lambda\mu}}$; в частности, $\mathrm{Sym}^n(V\oplus W) = \bigoplus_{a+b=n}(\mathrm{Sym}^a V \otimes \mathrm{Sym}^b W)$ и $\Lambda^n(V\oplus W) = \bigoplus_{a+b=n}(\Lambda^a V \otimes \Lambda^b W)$.
c) Докажите, что $\mathbb{S}_{U_\nu}(V\otimes W) = \oplus (V_\lambda \otimes W_\mu)^{C^\nu_{\lambda\mu}}$; в частности, $\mathrm{Sym}^n(V\otimes W) = \bigoplus V_\lambda \otimes W_\lambda$ (сумма по всем разбиениям n, у которых не больше $\dim V$ и $\dim W$ членов); $\Lambda^n(V\otimes W) = \bigoplus V_\lambda \otimes W_{\lambda^*}$ (сумма по всем разбиениям n, у которых не больше $\dim V$ членов, и первый член не больше $\dim W$).

12. a) Пусть дано разбиение $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_r)$. Докажите, что $\det\left(x_j^{\lambda_i}\right)\cdot \prod_{j=1}^r (1-x_j)^{-1} = \sum \det\left(x_j^{\nu_i}\right)$, где сумма берется по всем разбиениям $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_r)$, таким что $\nu_1 \ge \lambda_1 > \nu_2 \ge \lambda_2 > \ldots > \nu_r \ge \lambda_r$.
b) Докажите *формулу Пьери* для умножения функций Шура: $s_\lambda s_{(m)} = \sum s_\nu$, где сумма берется по всем разбиениям $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_{r+1})$, таким что $\nu_1 \ge \lambda_1 \ge \nu_2 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \nu_r \ge \lambda_r \ge \nu_{r+1} \ge 0$ и $\sum \nu_j = m + \sum \lambda_j$, т.е. по всем диаграммам Юнга ν, полученным из диаграммы Юнга λ прибавлением m клеточек в различных столбцах. Например, $s_{(2,1)}s_{(2)} = s_{(4,1)} + s_{(3,2)} + s_{(3,1,1)} + s_{(2,2,1)}$.
c) Докажите, что ограничение $\mathbb{S}_{U_\nu}(\mathbb{C}^{d+1})$ с GL_{d+1} на GL_d является прямой суммой (с кратностями 1) $\mathbb{S}_{U_\lambda}(\mathbb{C}^d)$ по всем диаграммам Юнга λ, полученным из диаграммы Юнга ν вычеркиванием нескольких клеточек в различных столбцах.

13. Докажите, что $\mathrm{Sym}^\bullet(V\oplus \Lambda^2 V) = \bigoplus_\lambda V_\lambda$.

14. Пусть $K_{\mu\lambda}$ — числа Костки, т.е. $T_\lambda = \oplus_{\mu\ge\lambda} U_\mu^{K_{\mu\lambda}}$. a) Докажите, что $T'_\lambda = \oplus_{\mu\le\lambda} U_\mu^{K_{\mu^*\lambda^*}}$ (представление, индуцированное со знакового). b) Докажите, что для разбиения $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_r)$ имеем $\Lambda^{\mu_1}V\otimes\ldots\otimes\Lambda^{\mu_r}V = \bigoplus_{\lambda\ge\mu} V_{\lambda^*}^{K_{\lambda\mu}}$.

15. Пусть $\dim V = 2$. Докажите, что $\mathrm{Sym}^p(\mathrm{Sym}^q V) \simeq \mathrm{Sym}^q(\mathrm{Sym}^p V)$ как представления $GL(V)$ (*взаимность Эрмита*).