

Задачи по классическим группам 1, 01.09.2011–15.09.2011

1. Опишите классы сопряженности (т.е. предъявите представителей и определите число элементов класса) в группах а) $GL(2, \mathbb{F}_7)$, б) $SL(2, \mathbb{F}_7)$, в) $PSL(2, \mathbb{F}_7)$.

2. Вычислите алгебру инвариантных относительно \mathfrak{S}_3 полиномиальных функций на $V \oplus V$, где V — неприводимое двумерное представление \mathfrak{S}_3 .

3. Докажите, что алгебра инвариантных полиномиальных функций на \mathbb{C}^2 относительно конечной подгруппы $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{C})$ порождается следующими функциями со следующими соотношениями: а) для $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : F_0 = x_1^n, F_1 = x_2^n, F_\infty = x_1 x_2$ и $F_\infty^n = F_0 F_1$.

б) для группы диэдра при четном $n : F_\infty^2, F_1^2, F_1 F_0 F_\infty$ и $(F_1 F_0 F_\infty)^2 = F_1^2 F_\infty^2 (F_1^2 - F_\infty^n)$, где $F_1 = (x_1^n + x_2^n)/2, F_0 = (x_1^n - x_2^n)/2, F_\infty = x_1 x_2$;

при нечетном $n : F_\infty^2, F_1^2 F_\infty, F_1 F_0$ и $(F_1 F_0)^2 F_\infty^2 = (F_1^2 F_\infty)(F_1^2 F_\infty - F_\infty^{n+1})$.

в) для $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) : F_0^3, F_0 F_\infty, F_1$, где $F_1 = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4), F_0 = x_1^4 + 2\sqrt{-3}x_1^2 x_2^2 + x_2^4, F_\infty = x_1^4 - 2\sqrt{-3}x_1^2 x_2^2 + x_2^4$ и $F_0^3 (F_0^3 - 12\sqrt{-3}F_1^2) = (F_0 F_\infty)^3$.

г) для $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) : F_\infty^2, F_1 F_\infty, F_0$, где $F_\infty = x_1 x_2 (x_1^4 - x_2^4), F_0 = x_1^8 + 14x_1^4 x_2^4 + x_2^8, F_1 = x_1^{12} - 33x_1^8 x_2^4 - 33x_1^4 x_2^8 + x_2^{12}$ и $F_\infty^2 (F_0^3 - 108F_\infty^4) = (F_1 F_\infty)^2$.

д) для $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) : F_\infty = x_1 x_2 (x_1^{10} + 11x_1^5 x_2^5 - x_2^{10}), F_0 = 228(x_1^{15} x_2^5 - x_1^5 x_2^{15}) - (x_1^{20} + x_2^{20}) - 494x_1^{10} x_2^{10}, F_1 = (x_1^{30} + x_2^{30}) + 522(x_1^{25} x_2^5 - x_1^5 x_2^{25}) - 1005(x_1^{20} x_2^{10} + x_1^{10} x_2^{20}), F_1^2 + F_0^3 = 1728F_\infty^5$.

4. $Sp(4, \mathbb{C})$ — это подгруппа $GL(4, \mathbb{C})$, сохраняющая невырожденную кососимметрическую билинейную форму в 4-мерном пространстве. Перечислите классы сопряженности *унипотентных* (т.е. вида $\text{Id} + N$, где N — нильпотентная матрица) матриц в $Sp(4, \mathbb{C})$ а) относительно группы $GL(4, \mathbb{C})$; б) относительно группы $Sp(4, \mathbb{C})$.

5. Пусть на \mathbb{C}^6 задана невырожденная симметрическая билинейная форма. Рассмотрим пространство Gr трёхмерных подпространств \mathbb{C}^6 , в ограничении на которые наша форма тождественно равняется нулю (*изотропных* подпространств). Докажите, что а) Gr распадается на две орбиты относительно действия $SO(6, \mathbb{C})$; б) Эти орбиты являются связными компонентами Gr ; в) Пересечение любых двух подпространств из одной орбиты нечётномерно, а пересечение любых двух подпространств из разных орбит чётномерно.