ЗАДАЧИ К ЛЕКЦИИ №2

1. Пусть на некоторой поверхности (или ее куске) существует единственная кратчайшая между любыми двумя точками. Рассмотрим гладкий путь $\sigma(t)$, поле $V = \dot{\sigma}(t)$ его скоростей и функцию расстояния $dist\ (M, \sigma(t))$ от фиксированной точки M до движущейся точки $\sigma(t)$.

   Доказать, что $\frac{d}{dt}\ dist\ (M, \sigma(t)) = (V, T)$, где T касательный вектор к единственной кратчайшей γ_t, соединяющей M и $\sigma(t)$, в ее концевой точке $\sigma(t)$.

2. Пусть поле вариации V ортогонально к T. Докажите, что в этом случае
$$\frac{d}{d\epsilon} L(\epsilon) \mid_{\epsilon=0} = -\int_a^b \left\{ \frac{\nabla_T T}{\sqrt{(T,T)}}, V \right\} dt$$
   для произвольной параметризации $\gamma(t)$.

3. Опишите все геодезические на

   а) цилиндре $x_1^2 + x_2^2 = 1$

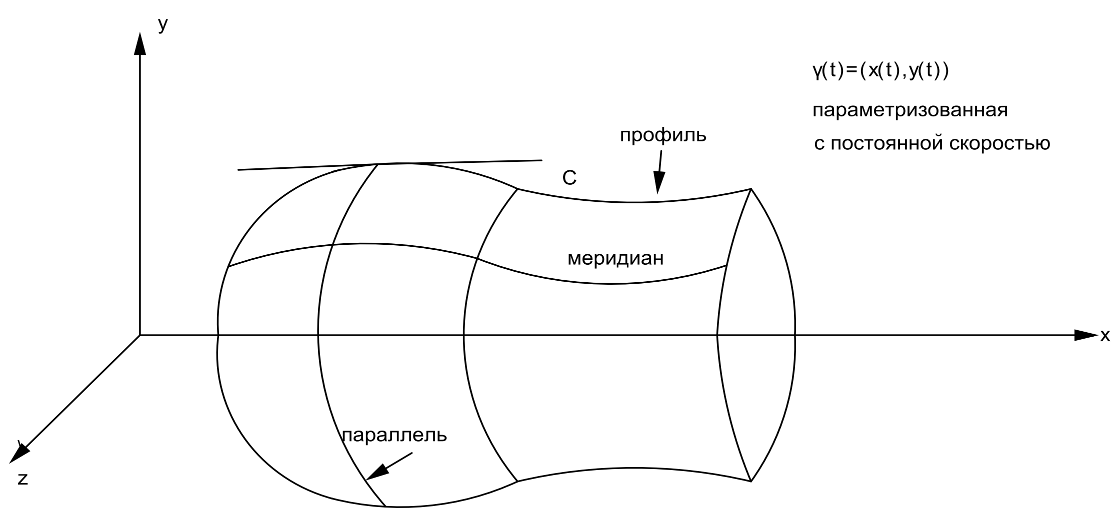
   б) сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

4. Доказать, что через данную точку m на поверхности с заданной скоростью $v \in T_m$ проходит единственная максимальная геодезическая.

5. Если $\gamma(t)$ – геодезическая, то $\left|\dot{\gamma(t)}\right| = const$.

6. Найдите вектор скорости и ускорения кривой $(\cos t, \sin t, \sin t, \cos t)$ на поверхности $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$. Является ли эта кривая геодезической?

7. Геодезические на поверхности вращения



Определим кривые

$$\alpha_\theta(t) = (x(t), y(t)\cos(\theta), y(t)\sin\theta) \text{ (меридиан)}$$

$$\text{и } \beta_t(\theta) = (x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta) \text{ (параллель).}$$

Доказать, что

а) параллели $\perp$ меридианам

б) каждый меридиан является геодезической

в) параллель $\beta_t(\theta)$ является геодезической $\Leftrightarrow$ наклон касательной $\dot{y}(t)/\dot{x}(t)$ в точке C равен 0.

8. Напишите интеграл, вычисляющий площадь гладкой поверхности $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ в $\mathbb{E}^3$.

9. Найдите площадь параметризованной поверхности в $\mathbb{E}^3$:

$$x = (a + b\cos\varphi)\cos\theta$$

$$y = (a + \cos\varphi)\sin\theta$$

$$z = b\sin\varphi$$

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

10. Напишите интеграл, выражающий площадь поверхности вращения

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)\cos\varphi$$

$$z = y(t)\sin\varphi$$

$$a < t < b$$

$$0 < \varphi < 2\pi$$

$$y(t) > 0 \text{ для } a < t < b.$$

11. $\varphi : U \to \mathbb{R}$ гладкая функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{E}^n$. Определим отображение $\varphi : U \to \mathbb{E}^{n+1}$, положив $\varphi(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, \varphi(u_1, \dots, u_n))$. Доказать, что объем

$$Vol\ (\varphi(U)) = \int_U \left(1 + \sum \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right)^2\right)^{1/2} du_1 \dots du_n.$$