Задачи 1

В задачах 1)-7) найти решение уравнения Эйлера и доказать, что оно является абсолютным минимумом. В задачах 6)-7) использовать задачу 8).

1) $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x)\ dt \to extr,\ x(0) = x(1) = 0$

2) $\int_1^e t\dot{x}^2\ dt \to extr,\ x(1) = 0, x(e) = 1$

3) $\int_0^1 e^x\dot{x}^2\ dt \to extr,\ x(0) = 0, x(1) = \ln 4$

4) $\int_0^1 x^2\dot{x}^2\ dt \to extr,\ x(0) = 2, x(1) = \sqrt{3}$

5) $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x \operatorname{ch} t)\ dt \to extr,\ x(0) = x(1) = 0$

6) $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2)\ dt \to extr,\ x(0) = 1, x(\pi/2) = 0$

7) $\int_0^{\pi/2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2x_1x_2)\ dt \to extr,\ x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_1(\pi/2) = 1, x_2(\pi/2) = -1.$

8) Доказать, что если $h \in C_0^1([0, \pi/2])$, то $\int_0^{\pi/2} \dot{h}^2\ dt \geq \int_0^{\pi/2} h^2\ dt$. Указание: рассмотрите интеграл $\int_0^{\pi/2} (\dot{h} - h \cdot \operatorname{ctg} t)^2\ dt$.

9) (Интеграл энергии) Доказать, что если L не зависит от t, а $\hat{x}$ — решение уравнения Эйлера, то функция

$$(\dot{x}L_{\dot{x}} - L)|_{x=\hat{x}}$$

постоянна.

10) (Вейерштрасс) Доказать, что экстремальная задача

$$\int_0^1 t^2\dot{x}^2\ dt \to extr, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$$

не имеет решения.

11) (Гильберт) Доказать, что решение экстремальной задачи

$$\int_0^1 t^{2/3}\dot{x}^2\ dt \to extr, \quad x(0) = 0,\ x(1) = 1$$

не является непрерывно дифференцируемым.

В задачах 12)-13) найти решение уравнения Эйлера (используйте интеграл энергии)

12) (задача о брахистохроне)

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + \dot{x}^2}{x}}\ dt \mapsto extr,\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$$

13) (задача о минимальной поверхности вращения)

$$\int_{-T_0}^{T_0} x\sqrt{1 + \dot{x}^2}\ dt \mapsto extr,\ x(-T_0) = x(T_0) = \xi.$$