3. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА И НАКРЫТИЯ.

Задача 1. а) Отображение $f : S^n \to \mathbb{R}P^n$ ставит точке A единичной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ с центром в начале координат O прямую OA. Докажите, что f — двулистное накрытие. Вычислите $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$. б) Постройте двулистное накрытие $g : C \to M$, где $C = S^1 \times [0,1]$ — цилиндр, а M — лента Мебиуса. в) Докажите, что $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ и вычислите гомоморфизм фундаментальных групп $g_* : \pi_1(C) \to \pi_1(M)$, где g — отображение пункта 1б. г) Пусть $L \subset S^2$ — окрестность экватора (от 10° южной до 10° северной широты). Докажите, что образ $f(L) \subset \mathbb{R}P^2$, где f — отображение пункта 1а (при $n = 2$), гомеоморфен ленте Мебиуса, а накрытие $f : L \to f(L)$ эквивалентно накрытию g пункта 1б.

Задача 2. Пусть $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n сомножителей) — n-мерный тор. а) Докажите, что $\mathbb{T}^n$ гомеоморфен факторпространству $\mathbb{R}^n$ по действию группы $\mathbb{Z}^n$ параллельных переносов на векторы с целочисленными координатами. б) Постройте накрытие $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ и вычислите $\pi_1(\mathbb{T}^n)$. в) Постройте двулистное накрытие $g : \mathbb{T}^2 \to K$, где K — бутылка Клейна. г) Опишите явно накрытие $h \stackrel{\text{def}}{=} g \circ f_2 : \mathbb{R}^2 \to K$ и прообраз (решетку) $N = h^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^2$, где $a \in K$ — произвольная точка. Докажите, что K гомеоморфен фактору $\mathbb{R}^2$ по группе G движений, сохраняющих решетку N. д) Докажите, что $\pi_1(K) = G$. е) Докажите, что группа $\pi_1(K)$ порождена двумя образующими a и b, связанными единственным соотношением $abab^{-1} = 1$. ж) Опишите подгруппу (индекса 2) $g_*(\pi_1(\mathbb{T}^2)) \subset \pi_1(K)$.

Пусть теперь B — букет двух окружностей, P и Q, с общей точкой b. Рассмотрим пространства (бесконечные графы) E, изображенные на рисунке 1. Для каждого из них определим отображение $p : E \to B$, при котором отмеченные точки (вершины графа) переходят в b, горизонтальные ребра — в окружность P, а петли и вертикальные ребра — в окружность Q. (Уточните эту конструкцию: какие именно вершины имеют графы? Какие из них соединены ребрами? Как именно устроено отображение на ребрах?)

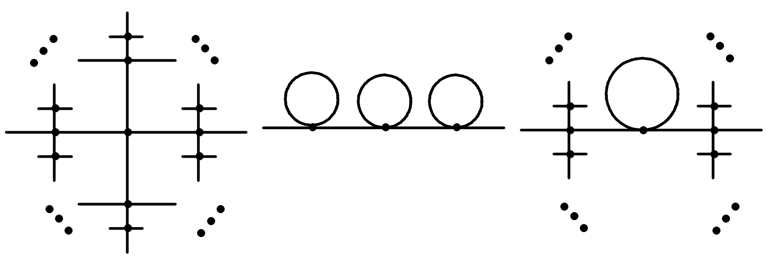
Задача 3. Докажите, что все три построенных отображения — накрытия.

Задача 4. а) Пусть E_n — подмножество графа a, состоящее из вершин, соединенных с центральной вершиной путем, состоящим не более чем из n ребер, и из всех ребер с концами в таких вершинах. Докажите, что E_n — стягиваемое топологическое пространство (т.е. существует гомотопия $f_t : E_n \to E_n$, $0 \le t \le 1$, такая, что f_0 — тождественное отображение, а образ f_1 переводит E_n в одну точку — центральную вершину). Отсюда вытекает (почему?), что группа $\pi_1(E_n)$ тривиальна. б) Докажите, что группа $\pi_1(E)$ тривиальна. в) Выведите из результатов задачи 3 и пункта 4б, что фундаментальная группа букета из двух окружностей — свободная группа с двумя образующими (обозначается $\mathcal{F}_2$).

Аналогично доказывается (как?), что фундаментальная группа букета из k окружностей — свободная группа $\mathcal{F}_k$ с k образующими.

Задача 5. Пусть $p : E \to B$ — накрытие. Докажите, что подгруппа $p_*(\pi_1(E,u)) \subset \pi_1(B,b)$ тогда и только тогда *не является* нормальной, когда существуют два отображения $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0,1] \to E$ такие, что $p \circ \Gamma_1 = p \circ \Gamma_2$ является петлей в B, но Γ_1 — петля, а Γ_2 — нет.

Задача 6. а) Вычислите подгруппу $p_*(\pi_1(E))$ для графа b. Нормальна ли эта подгруппа? Если нет, то укажите в графе пути Γ_1 и Γ_2, удовлетворяющие условию задачи 5. Опишите $\pi_1(E)$. б) Те же вопросы про граф c.



a b c

Рис. 1. Накрытия над букетом двух окружностей

Конечным графом называется топологическое пространство, полученное из конечного числа отрезков отождествлением (каким-то) их концов.

Задача 7. а) Пусть A — конечный граф, e — ребро в графе A, не являющееся петлей, и A/e — граф, полученный из A стягиванием ребра e. Докажите, что графы A и A/e гомотопически эквивалентны. б) Докажите, что любой связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей. Как связано число окружностей в букете с числом вершин и ребер графа?

Задача 8. Топологическое пространство Γ является связным n-листным накрытием букета из k окружностей. Докажите, что Γ гомеоморфно конечному графу, и найдите число вершин и ребер этого графа.

Задача 9. Используя результаты задач 7 и 8, докажите, что если группа G является подгруппой свободной группы $\mathcal{F}_k$ с k образующими, и индекс $|\mathcal{F}_k : G| = n$ конечен, то G изоморфна свободной группе $\mathcal{F}_p$. Выразите число p через n и k. Продумайте возможность чисто алгебраического доказательства этого утверждения.