Логика и алгоритмы 2011. Задание 4.

Вполне упорядоченные множества и аксиома выбора

67. Рассмотрим множества $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ со стандартным отношением порядка и пусть 1 означает одноэлементное упорядоченное множество. Докажите, что:
(a) $\mathbb{Q} + \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$; (b) $\mathbb{R} + 1 + \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$; (c) $\mathbb{R} + \mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}$.

68. Для любых линейно упорядоченных множеств α, β, γ установите следующие изоморфизмы: (a) $\alpha + (\beta + \gamma) \cong (\alpha + \beta) + \gamma$; (b) $\alpha(\beta\gamma) \cong (\alpha\beta)\gamma$; (c) $\alpha(\beta + \gamma) \cong \alpha\beta + \alpha\gamma$.

69. Верно ли, что: (a) $\alpha + \beta \cong \beta + \alpha$; (b) $\alpha\beta \cong \beta\alpha$; (c) $(\alpha + \beta)\gamma \cong \alpha\gamma + \beta\gamma$?

70. Для линейно упорядоченных множеств X докажите эквивалентность следующих утверждений:

    (a) Всякое непустое подмножество X имеет наименьший элемент;

    (b) Не существует бесконечной убывающей последовательности $x_0 > x_1 > \cdots$ элементов X.

71. Докажите, что 1) любое ограниченное сверху подмножество вполне упорядоченного множества X имеет наименьшую верхнюю грань; 2) всякий элемент X, отличный от наибольшего, имеет непосредственный последователь, но может не иметь непосредственного предшественника (как определить эти понятия?).

72. (возведение в степень) Пусть $(X, <)$ — вполне упорядоченное множество. Обозначим через $\Omega(X)$ множество всех конечных последовательностей $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ элементов X таких, что $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, где n может быть произвольным.

    Зададим на $\Omega(X)$ лексикографический порядок: $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ меньше $\langle y_1, y_2, \ldots, y_m \rangle$, если для некоторого $k \leq \min(n, m)$ $\forall i < k\, x_i = y_i$ и $x_k < y_k$, или же $\forall i \leq n\, x_i = y_i$ и $n < m$.

    (a) Доказать, что $\Omega(X)$ вполне упорядочено.

    (b) Проверить, что $\Omega(1) \cong \mathbb{N}$; $\Omega(X + 1) \cong \Omega(X) \cdot \mathbb{N}$; $\Omega(X + Y) \cong \Omega(X) \cdot \Omega(Y)$.

73. Начальным отрезком вполне упорядоченного множества α называем подмножество $\beta \subset \alpha$ для которого $\forall x, y\ (x \in \beta$ и $y < x \Rightarrow y \in \beta)$. Обозначаем интервал $\{x \in \alpha \mid x < a\}$ через $\bar{a}$. Проверьте, что любой собственный (т.е. отличный от самого X) начальный отрезок α имеет вид $\bar{a}$ для некоторого $a \in \alpha$.

74. Вспомнив лекцию, докажите:

    (a) Вполне упорядоченное множество α не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку.

(b) Если α, β — вполне упорядоченные множества, то одно из них изоморфно начальному отрезку другого. *Указание:* рассмотрите бинарное отношение $R \subset \alpha \times \beta$ такое, что $xRy \iff \bar{x} \cong \bar{y}$. Проверьте, что R, R^{-1} функциональны и сохраняют порядок.

75. Докажите эквивалентность аксиоме выбора следующего утверждения: *для любой сюръекции* $f : A \to B$ *найдется отображение* $g : B \to A$ *такое, что* $f \circ g = id_B$.

76. Теорема Цермело (эквивалентная аксиоме выбора) говорит о том, что любое множество можно вполне упорядочить. Выведите из неё и задачи 74, что любые два множества сравнимы по мощности.

77. Выведите аксиому выбора непосредственно из леммы Цорна и из теоремы Цермело.

78. С помощью леммы Цорна докажите, что всякая цепь в частично упорядоченном множестве содержится в максимальной (по включению).

79. Докажите, что любой частичный порядок на множестве X можно продолжить до линейного. (Отношение R_2 *продолжает* R_1, если $R_1 \subset R_2$.)

80. Множество $X \subset \mathbb{R}$ назовем *линейно независимым над* $\mathbb{Q}$, если для любых $e_1, \ldots, e_n \in X$ и $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ равенство $r_1e_1 + \cdots + r_ne_n = 0$ имеет место лишь в случае $r_1 = \cdots = r_n = 0$.

    (a) Докажите с помощью леммы Цорна, что существует максимальное линейно независимое над $\mathbb{Q}$ подмножество $\mathbb{R}$ (такое множество называется *базисом Гамеля*).

    (b) Если $B \subset \mathbb{R}$ — базис Гамеля, то всякое $x \in \mathbb{R}$ единственным образом (с точностью до перестановки слагаемых) представляется в виде

    $$x = r_1e_1 + \cdots + r_ne_n,$$

    для некоторых $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ и $e_1, \ldots, e_n \in B$.

    (c) Докажите, что все базисы Гамеля имеют одинаковую мощность. Какую?

81. Выведите из предыдущей задачи:

    (a) Существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отличная от линейной и удовлетворяющая тождеству $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Может ли такая функция иметь предел в точке $x = 0$?

    (b) Существует биекция между $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$, сохраняющая операцию сложения, то есть аддитивные группы $(\mathbb{C}, +)$ и $(\mathbb{R}, +)$ изоморфны. (Вместо $\mathbb{C}$ можно взять аддитивную группу n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$.)