"Спецфункции". Тезисы 2-ой лекции.

Интеграл Эйлера первого рода, или бета функция.
Под этим понимается интеграл

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Он сходится при $\mathrm{Re}\, p > 0$, $\mathrm{Re}\, q > 0$. Докажем, что

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1 способ. Пусть $\mathrm{Re}\, p > 0$, $\mathrm{Re}\, q > 0$. Тогда, в силу абсолютной сходимости интегралов, произведение $\Gamma(p)\Gamma(q)$ представляется в виде абсолютно сходящегося двойного интеграла

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx \cdot \int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}dy = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy$$

Сделаем в нем замену переменных $u = x + y$, $v = x/(x + y)$, т.е., $x = uv$, $y = u(1-v)$, $dxdy = ududv$,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy = \int_0^\infty\int_0^1 e^{-u}u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}dudv,$$

что возможно в силу абсолютной сходимости обоих интегралов. Последний интеграл распадается в произведение, равное $\Gamma(p+q)B(p,q)$.

2 способ. Умножив подинтегральную функцию в интеграле $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ на сумму $x+(1-x)$, равную 1, при тех же предположениях на p и q получаем тождество

$$B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1).$$

Другое тождество,

$$pB(p,q+1) = qB(p+1,q).$$

можно получить, взяв интеграл от производной $\frac{d}{dx}(x^p(1-x)^q)$. Комбинация этих два соотношений дает реккурентное соотношение по одной переменной,

$$B(p,q) = \frac{p+q}{q}B(p,q+1),$$

итерируя которое, получаем для произвольного натурального n

$$B(p,q) = \frac{(p+q)\cdots(p+q+n-1)}{q\cdots(q+n-1)}B(p,q+n) =$$

$$= \frac{(p+q)\cdots(p+q+n-1)}{q\cdots(q+n-1)}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+n-1}dx.$$

Сделаем в последнем интеграле замену $t = nx$:

$$B(p,q) = \frac{(p+q)\cdots(p+q+n-1)}{q\cdots(q+n-1)} \int_0^n \left(\frac{t}{n}\right)^{p-1} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{q+n-1} \frac{dt}{n} =$$

$$= \frac{(p+q)\cdots(p+q+n-1)}{n!n^{p+q-1}} \frac{n!n^{q-1}}{q\cdots(q+n-1)} \int_0^n t^{p-1} \left(1-\frac{t}{n}\right)^{q+n-1} dt$$

С ростом n первая дробь стремится к эйлеровскому произведению для $\Gamma(p+q)^{-1}$, вторая - к эйлеровскому произведению для $\Gamma(q)$, а интеграл - к эйлеровскому интегралу $\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt$ (см. лекцию 1) :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(q)} \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt.$$

Полагая в этом равенстве $q = 1$, получаем

$$\frac{1}{p} = \int_0^1 t^{p-1}dt = B(p,1) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(p+1)} \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt == \frac{1}{p\Gamma(p)} \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt,$$

что приводит к одновременному доказательству формул

$$\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt = \Gamma(p) \qquad \text{и} \qquad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$