

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЛИСТОК 3.

*Задача 1.* При каких  $k$  система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = kx_2 \end{cases} .$$

имеет непостоянный первый интеграл на плоскости?

*Задача 2.* Найти такой первый интеграл  $f$  векторного поля  $\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$  на плоскости, что  $f|_{x=0} = \sin y$ .

*Задача 3.* Найти все линейные первые интегралы векторного поля  $v$  в  $\mathbb{R}^3$  с координатами  $(x, y, z)$ :

$$v = (y - z)\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y)\frac{\partial}{\partial y} + (x^2 + z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

*Задача 4.* Для функций  $x^2 + y^2 + z^2$  и  $x^2 + 2y^2 + 3z^2$  (на  $\mathbb{R}^3$ ) указать множество точек, в которых они функционально независимы. Построить хотя бы одно ненулевое векторное поле, для которого эти функции являются первыми интегралами. Будут ли решения соответствующего дифференциального уравнения неограниченно продолжаться вперед (назад)?

*Задача 5.* Рассмотрим при  $t > 0$  систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{y}{t} \\ \dot{y} = -\frac{x}{t} \end{cases} .$$

- а) Нарисовать соответствующее векторное поле;
- б) Найти какой-нибудь непостоянный автономный (не зависящий от  $t$ ) первый интеграл этой системы уравнений;
- в) Решите эту систему.

*Задача 6.* Переводится ли векторное поле  $x\frac{\partial}{\partial x}$  в векторное поле  $2x\frac{\partial}{\partial x}$  диффеоморфизмом прямой?