

Ряды Фурье

Определение 1. Будем говорить, что функция f *кусочно непрерывна* (соотв. *кусочно непрерывно дифференцируема*), если её область определения можно разбить на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$, и найдутся непрерывные (соотв. с непрерывной производной) функции f_i на $[x_i, x_{i+1}]$, значения которых на (x_i, x_{i+1}) совпадают с f .

Задача 1. а) Разложите в ряд Фурье функцию $\text{sign}(x)$, продолженную до периодической с отрезка $[-\pi, \pi]$.

б) Вычислите из этого сумму ряда $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

в) К чему сойдётся последовательность Фейера кусочно непрерывной периодической функции в точках разрыва?

Задача 2. а) Разложите в ряд Фурье функцию $\pi/2 - |x|$, продолженную до периодической с отрезка $[-\pi, \pi]$.

б) Докажите, что полученный ряд равномерно сходится, и, в частности, сходится к $\pi/2$ в точке $x = 0$. Сумма какого ряда была в результате посчитана?

в) К чему сойдётся ряд Фурье периодической кусочно непрерывно дифференцируемой функции в особых точках?

Задача 3. Разложите в ряд Фурье следующие функции:

а) $|\sin(x)|$;

б) $x \sin(x)$, продолженную до периодической с $[-\pi, \pi]$;

в) e^{ax} , продолженную до периодической с $[-\pi, \pi]$;

$d^*) \sec(x) = 1/\cos(x)$

Задача 4. Разлагая функцию x^2 , продолженную до периодической с подходящего отрезка, вычислите сумму ряда

а) $\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2}$;

б) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$;

в) $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Задача 5. Пусть f и g — непрерывные периодические функции. Зная коэффициенты рядов Фурье f и g , запишите ряд Фурье их свёртки $f * g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t-x)dx$.

Задача 6. а) Разложите в ряд Фурье функцию $\cos(\alpha x)$, продолженную до периодической с $[-\pi, \pi]$.

б) Подставляя $x = \pi$, докажите тождество

$$\text{ctg}(\pi\alpha) = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \quad \left(\text{неформально } \text{ctg}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{t - \pi n} \right).$$

$c^*)$ Докажите, что ряд в правой части сходится равномерно. Получите почленным интегрированием выражение для синуса через бесконечное произведение.

$d^*)$ Разлагая дроби в правой части в бесконечные геометрические прогрессии, выразите $\zeta(2k)$ через коэффициенты ряда Тейлора $\text{ctg}(t)$. Вспомните, как они связаны с числами Бернулли (Листок 11).

Задача 7*. Пусть $f(x) = \sum b_k \sin |x|$, продолженная до периодической с отрезка $[-\pi, \pi]$.

$a^*)$ Докажите, что если $\sum b_k$ сходится, то $f(x)$ определена и непрерывна.

$b^*)$ Докажите, что для частичной суммы ряда Фурье f в нуле выполнено $S_n(0) > b_n \ln(n)/\pi$.

$c^*)$ Приведите пример сходящейся последовательности b_n , для которой ряд Фурье f расходится в нуле.